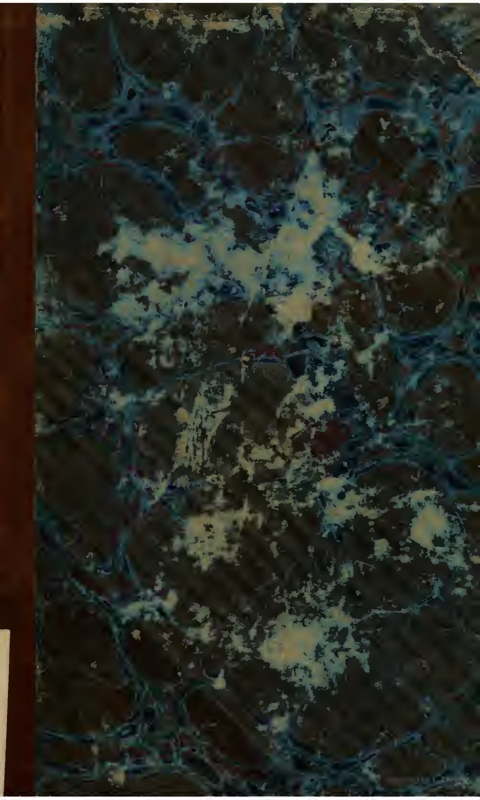






NAZIONALE
B. Prov.
I
502
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI
Digitized by Google

B. P.
I
502

Digitized by Google

606669
SBN

ESSAI
DE GÉOMÉTRIE
ANALYTIQUE,

APPLIQUÉ

AUX COURBES ET AUX SURFACES
DU SECOND ORDRE.

PAR J.-B. BIOT, Membre de l'Institut de France, etc.

.... Aspice si quid
Et nos, quod cures proprium fecisse, loquamur.
HORAT.

QUATRIÈME ÉDITION.



A PARIS,

Chez J. KLOSTERMANN fils, acquéreur du fonds de Mad. Ve BERNARD, Libraire des Écoles impériales Polytechnique et des Ponts et Chaussées, rue du Jardinet, n°. 13.

M. DCCC. X.



Digitized by Google

PRÉFACE.

Cet Ouvrage est principalement destiné aux jeunes gens qui étudient pour entrer à l'École Polytechnique. Il est le résultat des leçons que j'ai données à l'École centrale de l'Oise. Je me suis proposé d'y présenter les Élémens de la *Géométrie analytique.*

J'entends, par cette dénomination, la manière d'appliquer l'algèbre à la géométrie, non pas à l'aide des constructions particulières qu'il faut varier pour tous les cas, mais en employant les méthodes générales que MM. Lagrange et Monge ont les premiers fait connaître dans leurs ouvrages; méthodes enseignées depuis par M. Monge à l'École Polytechnique, et si heureusement introduites par M. Lacroix dans ses traités élémentaires; ce qui est un des plus importans services que l'on ait jamais rendus à l'enseignement. Instruit par les écrits et par les leçons de ces professeurs célèbres, et pénétré des avantages que les élèves peuvent en recueillir, j'ai cherché à les répandre, en présentant les Élémens de la Géométrie analytique dans un ordre facile à suivre, et sous la forme la plus abrégée et la plus simple qu'ils puissent avoir. Je ne me flatte pas d'avoir atteint ce

but ; mais je m'estimerais heureux, si ce petit Ouvrage, après avoir été utile aux élèves, donne naissance à quelque autre plus parfait, auquel je serai le premier à applaudir.

Je donne d'abord les préliminaires relatifs aux points, à la ligne droite et au plan. Ces préliminaires sont, dans la Géométrie analytique, aussi indispensables que la règle et le compas dans le tracé de la Géométrie pratique.

Je fais ensuite l'application de ces principes à la discussion des courbes et des surfaces du second ordre.

Partout j'ai adopté la division décimale du quart de cercle.

J'ai tâché de n'employer que des méthodes générales, et qui pussent également servir dans la suite pour discuter les propriétés des courbes et des surfaces quelconques. J'ai coupé par des divisions nombreuses les différens chapitres, afin que les élèves pussent retrouver avec facilité les méthodes ou les propositions particulières dont ils auraient besoin. En cela, j'ai cherché à suivre l'exemple d'Euler qui est, dans tous ses ouvrages, un modèle de clarté.

Pour qu'un livre élémentaire du genre de celui-ci atteignît parfaitement le but auquel il est destiné, il faudrait que les propositions s'y trouvassent disposées dans l'ordre le plus naturel, et

que les démonstrations y fussent présentées avec toute la clarté, l'élégance et la simplicité dont elles sont susceptibles; mais ce degré de perfection, dont on doit s'efforcer d'approcher, est beaucoup plus difficile à atteindre qu'on ne le croit communément; et les améliorations successives qu'ont apportées à leurs ouvrages les hommes distingués qui ont écrit dans ces derniers tems sur les Elémens des Mathématiques, offrent une preuve sensible de cette vérité. Aussi j'ai toujours été persuadé qu'un livre élémentaire ne peut être jugé que par l'expérience, qu'il faut, pour ainsi dire, l'essayer sur l'esprit des élèves, et vérifier, par cette épreuve, la bonté des méthodes que l'on a choisies. Le seul moyen de perfectionner un ouvrage de ce genre est donc de recueillir, et même de rechercher avec le plus grand soin les remarques de ceux qui l'ont enseigné. C'est ce que j'ai fait pour celui-ci, et j'ai beaucoup d'obligation aux professeurs qui m'ont donné cette marque d'estime: sous ce rapport, je dois des remercîmens particuliers à M. Servois, professeur aux Écoles d'Artillerie; à M. Garnier, auteur de plusieurs ouvrages élémentaires de mathématiques; à M. Boudrot, professeur à l'École spéciale militaire, à MM. les professeurs Rimbert et Binet aîné, ainsi qu'à MM. Dinet et Francœur, mes

anciens compagnons à l'École Polytechnique, maintenant professeurs aux Lycées et à la Faculté des sciences de Paris. Je dois sur-tout insister sur ce qui regarde M. Dinet. Cet excellent professeur, plein d'activité et de zèle, avait simplifié pour ses nombreux élèves une partie de mes démonstrations, principalement ce qui regarde la discussion des courbes; il a bien voulu me communiquer ses remarques avec toute la franchise de l'amitié, et j'en ai profité souvent. J'ai cherché à éclaircir les points qui avaient paru embarrasser les élèves, à généraliser les démonstrations, à les abréger; en un mot, dès la seconde édition, j'avais refondu entièrement tout ce petit Ouvrage; je l'ai encore retouché dans cette dernière; et, tel qu'il est, je ne le crois pas indigne d'être offert à l'enseignement. J'ai fait la même chose, avec les mêmes secours, pour la seconde édition de mon *Traité élémentaire d'Astronomie physique*. L'accueil favorable que le public a bien voulu lui faire ne m'a rendu que plus ardent à le corriger; et j'ai regardé la critique éclairée et bienveillante des professeurs qui ont enseigné cet ouvrage comme la marque d'estime la plus précieuse et la plus utile qu'ils pussent m'accorder.

ESSAI
DE GÉOMÉTRIE
ANALYTIQUE.

PRÉLIMINAIRES.

1. Lorsqu'on a quelque usage de l'algèbre, on s'apperçoit que la solution d'un problême y est toujours composée de deux parties. La première consiste à énoncer en algèbre l'état de la question proposée ; cela s'appelle mettre le problême en équation : la seconde a pour objet la résolution des équations du problême, et la détermination des inconnues ; celle-ci est purement de calcul.

On peut donc appliquer l'analyse à la résolution d'une question, quelle que soit d'ailleurs sa nature, dès qu'on sait l'écrire en langue algébrique.

Montrer comment on peut écrire en analyse les questions de géométrie, et, réciproquement, comment on peut traduire en géométrie les résultats de l'analyse : tel est le but de l'*application de l'algèbre à la géométrie*.

2. Pour donner un exemple bien simple de cet enchaînement, proposons-nous de diviser une ligne donnée en deux parties telles que la première soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie.

Représentons par a la longueur de la ligne donnée, c'est-à-dire, le nombre qui exprime combien de fois elle contient l'unité de longueur : soit de même x le premier segment inconnu ; le second sera $a-x$, et, d'après les conditions du problême, on aura

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}.$$

Cette équation, qui ne contient que la seule inconnue x, servira à déterminer le segment cherché. En effet, on en tire,

$$x^2+ax=a^2;$$

ce qui donne pour x deux valeurs

$$x=-\frac{a}{2}+\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$$

ou bien

$$x=-\frac{a}{2}-\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$$

qui satisfont également aux conditions de la question proposée, puisqu'elles vérifient l'équation qui les exprime.

Pour savoir ce qu'elles signifient, considérons d'abord la première, (fig. 1.) $\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}}$ représente l'hypothénuse AC d'un triangle rectangle ACB, dont un des côtés AB est égal à la ligne donnée a, et dont l'autre BC égale la moitié de cette ligne ; et puisque, pour avoir x, il faut retrancher $\frac{a}{2}$ de cette hypothénuse, si du point C comme centre, avec CB pour rayon, on décrit une circonférence de cercle, elle coupera AC en un point D tel que AD sera la longueur du segment cherché. En le reportant ensuite sur AB par un arc de cercle, on aura le point

E, où il faut diviser cette ligne. Cette construction est précisément celle que l'on donne dans les Élémens de Géométrie, pour couper une ligne en moyenne et extrême raison.

La seconde valeur de x est entièrement négative et égale à $-AD'$.

3. Le problême précédent a été très-facile à traduire en algèbre, parce qu'il n'exige pas que l'on ait sous les yeux une figure de géométrie, et qu'il se réduit immédiatement à une question de nombres. Or, tous les problêmes de géométrie peuvent être réduits de cette manière, mais non pas tous avec une égale simplicité.

La méthode qu'il faut employer pour y parvenir est générale. C'est exactement celle que l'on suit en algèbre pour mettre les problêmes en équation.

On commence par reconnaître toutes les lignes connues ou inconnues qui doivent entrer dans la solution du problême; et on choisit des lettres pour les représenter. Si l'on a réellement considéré toutes ces quantités, il doit exister entre elles certaines relations, certains rapports, qui permettent de les déduire les unes des autres. On cherche, d'après les règles de la géométrie, quelle marche il faudrait suivre, quelles opérations il faudrait faire pour établir ainsi leur dépendance mutuelle : à mesure que l'on découvre ces opérations, on les écrit algébriquement. Le résultat vous conduit toujours à trouver l'expression algébrique d'une des quantités connues ou inconnues, par le moyen des autres; alors vous égalez cette quantité à la lettre qui la représente, précisément comme si vous aviez voulu la vérifier : vous obtenez ainsi une équation entre les quantités connues et inconnues du problême, et, lorsque vous avez formé, de cette manière, autant

d'équations que d'inconnues, le reste s'achève par les règles ordinaires de l'algèbre.

4. La véritable difficulté de ces sortes de problêmes n'est pas proprement de trouver les relations qui existent entre les lignes, car ces relations sont naturellement indiquées par l'énoncé de la question; nous verrons même que l'on peut toujours, sans aucun artifice particulier, obtenir l'expression de ces rapports, et mettre les problêmes en équation, en désignant d'une manière analytique la marche et la combinaison de toutes les lignes qui donnent par leurs intersections, les quantités cherchées : mais, ce qui exige une adresse particulière, ce qui fait proprement l'art de l'analyste, c'est de découvrir la route la plus expéditive pour passer des connues aux inconnues, et de saisir, parmi tous les rapports qui les unissent, ceux qui sont plus propres à être exprimés par le calcul. J'aurai, dans le cours de cet Ouvrage, de fréquentes occasions d'appliquer ces remarques, et d'en faire sentir la vérité par des exemples : pour le moment, je ne me propose que d'en faire concevoir les principes généraux.

Lorsque les équations d'un problême de géométrie ont été résolues par le moyen de l'algèbre, on a l'expression analytique des lignes cherchées, au moyen des lignes et des quantités données : il ne reste plus qu'à effectuer numériquement les opérations indiquées dans ce résultat.

5. Pour cela, on doit remarquer que les lignes ne peuvent être comparées numériquement les unes aux autres qu'autant qu'on les rapporte, ou qu'on les conçoit rapportées à une même ligne qui est censée leur servir de mesure, et que l'on prend pour unité de longueur. Au moyen de cette convention, chaque ligne se trouve

représentée par un nombre, et l'on peut faire sur elles toutes les opérations de l'arithmétique. Ainsi on peut les concevoir ajoutées ou retranchées les unes des autres, multipliées entre elles ou divisées; et c'est seulement sous ce rapport que l'on peut attribuer un sens à ces opérations.

Alors il devient facile de calculer les valeurs des lignes dont on a trouvé l'expression analytique. Si, par exemple, les lignes connues sont désignées par a, b, c, l'inconnue par x, et que l'on ait $$x = \frac{ab}{c},$$
cela signifie que le nombre, qui représente la ligne x, ou le rapport de cette ligne à l'unité, est une quatrième proportionnelle aux nombres ou aux rapports qui représentent les lignes $a\,b\,c$,

Et, si l'on avait trouvé

$$x = \sqrt{a^2 + b^2},$$

on prendrait la somme des carrés des nombres qui représentent les lignes a et b, ou leurs rapports avec l'unité; on extrait la racine carrée de cette somme, et l'on aurait le nombre qui représente la ligne x, ou le rapport de cette ligne à l'unité.

6. Il serait très-possible que la solution d'un problême de géométrie donnât, pour la ligne inconnue x, une expression de cette forme

$$x = a\,b.$$

Ce résultat n'offrirait aucun sens raisonnable, si l'on voulait regarder les lettres $a\,b\,x$ comme représentant des lignes réelles, et non pas des nombres; car il semblerait signifier que la ligne x est égale à la surface du rectangle construit sur les deux lignes a et b; mais cette difficulté disparaît aussitôt qu'on revient aux notions exactes, et qu'on regarde ces lettres comme désignant des rapports.

Ce résultat signifie que le nombre ou le rapport, qui représente la ligne x, est égal au produit des nombres ou des rapports qui représentent les lignes a et b. Il en sera de même dans tous les autres cas où la valeur de l'inconnue se trouverait exprimée d'une manière quelconque en fonction des quantités connues du problême. En considérant les lettres comme représentant des nombres, l'interprétation des résultats n'offrira aucune espèce d'obscurité.

7. Les opérations arithmétiques que l'on fait sur les lignes, comme on vient de le voir, en les représentant par des nombres, peuvent s'effectuer également par la géométrie. Je ne parle pas seulement d'ajouter les lignes ou de les soustraire, ce qui exige simplement qu'on les place à la suite l'une de l'autre, ou qu'on les superpose; mais la multiplication, la division et l'extraction des racines carrées, peuvent se faire aussi géométriquement, par le moyen de la ligne droite et du cercle.

8. Par exemple, si AB (fig. 2) représente l'unité de longueur, et qu'il faille multiplier AD par AC, on menera deux lignes sous un angle quelconque; on portera AB et AD sur la première, AC sur la seconde; puis, joignant les points B et C par une ligne droite, et menant DE parallèle à BC, AE sera la ligne demandée. En effet, les triangles semblables ABC, ADE, donnent

$$\frac{AE}{AD}=\frac{AC}{AB}$$

ou

$$AE=AD.\frac{AC}{AB}.$$

Réciproquement, s'il fallait diviser AE par AD, on joindrait les points E et D par une ligne droite DE; puis, menant BC parallèle à DE, AC serait le quotient de la division.

9. S'il s'agissait d'extraire la racine carrée d'une ligne donnée dont l'expression numérique serait a, et que nous supposerons représentée par AD (fig. 3), on ajouterait à cette ligne l'unité de longueur DB; puis, divisant AB en deux parties égales au point C, de ce point comme centre, avec CA ou CB pour rayon, on décrirait une circonférence de cercle : alors la perpendiculaire DE, menée du point D à la droite AB, et terminée à la circonférence, serait la racine carrée demandée. En effet, d'après les propriétés connues du cercle, la longueur de cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre celles des deux segmens.

Il est visible que la même construction servirait pour trouver géométriquement une moyenne proportionnelle entre deux lignes quelconques données.

10. En combinant les deux procédés que nous venons d'exposer avec les propriétés du triangle rectangle, on construirait géométriquement les racines d'une équation quelconque du second degré.

En effet, si cette équation était de la forme

$$x^2 - 2ax = b^2,$$

en la résolvant par rapport à x, on trouverait

$$x = a \pm \sqrt{a^2 + b^2}.$$

La première valeur se construira comme celle de l'article 2. On prendra (fig. 4) une ligne AB égale à b; puis on élevera sur cette ligne la perpendiculaire $CB = a$, et, du point C comme centre avec CB pour rayon, décrivant une circonférence de cercle, AE sera une des racines de l'équation proposée; car on aura

$$AE = CE + CA = a + \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Quant à l'autre racine, on voit qu'elle est négative, puisque $\sqrt{a^2+b^2}$ est plus grand que a; mais, abstraction faite de son signe, il est visible que AD ou $AC - CD$ représente la quantité $\sqrt{a^2+b^2}-a$. Ainsi cette quantité AD, prise avec le signe négatif, exprime la seconde racine.

Si, au lieu de l'équation précédente, on avait

$$x^2 - 2ax = -b^2,$$

on en tirerait, par la résolution,

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Alors la construction serait un peu différente. On prendrait une ligne AB égale à b (fig. 5); sur cette ligne on éleverait la perpendiculaire CB égale à a; puis, du point C, comme centre avec CB pour rayon, on décrirait une circonférence de cercle : alors, menant du point A sur la ligne AB une perpendiculaire AE, cette perpendiculaire couperait la circonférence en deux points D, E et AD, AE, seraient les deux racines de l'équation : la première représenterait $a - \sqrt{a^2 - b^2}$; la seconde $a + \sqrt{a^2 - b^2}$.

Si le cercle ne coupait point la droite en deux points, mais la touchait en un seul, ce qui arriverait si a était égal à b, les deux racines de l'équation deviendraient égales, et il n'y aurait qu'une solution $x = a$.

Si le cercle ne coupait pas la droite AE, ce qui arriveroit si b était plus grand que a, les deux racines de l'équation seraient imaginaires, et le problème serait impossible (1).

(1) Les exemples que je viens de rapporter sont tirés de la Géométrie de Descartes.

Au reste, ces mêmes racines pourraient encore s'extraire géométriquement d'une infinité de manières différentes; mais j'ai rapporté seulement celles qui précèdent, parce qu'elles sont les plus simples, et qu'elles suffisent dans tous les cas.

11. Il arrive quelquefois qu'en résolvant algébriquement des problèmes de géométrie, on est conduit, par le calcul à des résultats tels que celui de l'article 6, dans lesquels tous les termes n'ont pas, en apparence, les dimensions convenables pour représenter des lignes. Ces résultats, dont la construction pourrait embarrasser les commençans, s'interprètent sans aucune difficulté, dès qu'on se rappelle qu'on ne peut faire entrer des lignes dans le calcul qu'en les supposant représentées par des nombres. Par exemple, si a, b, c représentent des longueurs données, et x la longueur inconnue que l'on cherche, il est possible que l'équation en x donne

$$x = a^2 + \sqrt{a^3 - ab + c^2}.$$

Une pareille expression n'aurait aucun sens raisonnable, si l'on voulait entendre que a, b, c et x représentent réellement des lignes; mais elle s'interprète sans difficulté dès que l'on regarde ces quantités comme des nombres.

Veut-on construire une expression de ce genre par la géométrie, rien de plus simple : il faut représenter aussi l'unité linéaire par une lettre, par I, par exemple; puis, au lieu des nombres a, b, c, x, on aura les rapports équivalens $\frac{A}{I}$, $\frac{B}{I}$, $\frac{C}{I}$, $\frac{X}{I}$, dans lesquels A, B, C, X désignent réellement les lignes dont a, b, c, x étaient les expressions numériques; et, en substituant ces valeurs dans

l'équation précédente, elle deviendra

$$\frac{X}{I}=\frac{A^2}{I^2}+\sqrt{\frac{A^3}{I^3}-\frac{A}{I}.\frac{B}{I}+\frac{C^2}{I^2}},$$

ou, en faisant évanouir le dénominâteur du premier membre,

$$X=\frac{A^2}{I}+\sqrt{\frac{A^3}{I}-AB+C^2}.$$

L'expression de la ligne X ainsi préparée, ne renferme plus que des quantités faciles à construire : car $\frac{A^2}{I}$ représente une ligne D, qui s'obtiendra par une quatrième proportionnelle; $\frac{A^3}{I}$ peut se décomposer en $\frac{A^2}{I}.A$, et l'on peut lui substituer un carré E^2, dans lequel la ligne E est moyenne proportionnelle entre A et $\frac{A^2}{I}$: de même, le produit AB peut se transformer en un carré F^2, et la partie radicale de l'expression précédente deviendra

$$\sqrt{E^2-F^2+C^2}.$$

Au moyen des triangles rectangles, E^2-F^2 peut se transformer en carré H^2; et le résultat, qui devient $\sqrt{H^2+C^2}$, s'obtiendra par une construction du même genre. Le radical de cette expression sera ainsi représenté tout entier par une ligne G, et l'on aura

$$X=D+G;$$

résultat qui n'exige plus qu'une simple addition de lignes. On opérera de la même manière dans tous les cas analogues; et, si l'on veut bien se rappeler que les lettres sur lesquelles on effectue le calcul représentent toujours des

rapports de lignes, l'interprétation des résultats n'offrira jamais aucune obscurité.

12. Au reste, les constructions géométriques ne doivent être regardées que comme un moyen quelquefois élégant de représenter les solutions des problèmes, et non pas comme un procédé rigoureux pour trouver leurs valeurs numériques. Relativement à ce dernier objet, le calcul est infiniment préférable, parce que son exactitude est indéfinie, et même il vaut toujours mieux y recourir, quand la construction n'est pas très-simple.

13. Les méthodes que nous venons de parcourir n'avaient pour but que des problèmes *déterminés*, c'est-à-dire, dans lesquels l'inconnue n'était susceptible que d'un certain nombre fini de valeurs; mais on peut aussi se proposer des questions de géométrie indéterminées, qui soient susceptibles d'une infinité de solutions.

Par exemple, si l'on considère une ligne courbe AMM' tracée sur un plan (fig. 6), et que, de plusieurs points de cette courbe, on mène des perpendiculaires PM, $M'P'$, sur une droite AX donnée dans le plan, ces perpendiculaires auront certainement une longueur déterminée dépendante de la nature de la courbe, de sa position et de la distance des points MM' : si donc on prend sur la ligne AX un point fixe A pour point de départ, chaque ligne AP aura sa correspondante PM, qui résultera du concours de toutes ces circonstances; et la relation qui subsistera entre les AP et les PM, dans les diverses parties de la courbe, détermine nécessairement la forme de son cours.

Or, il serait très-possible que ce rapport fût de nature à être toujours exprimé par une même équation entre les AP et les PM; auquel cas cette équation servirait à trouver une quelconque de ces quantités par le moyen de l'autre, lorsque celle-ci serait donnée.

Si l'on savait, par exemple, que, dans toute l'étendue de la courbe, chaque PM est égale à la ligne AP qui lui correspond, en représentant généralement les premières par la lettre y, et les dernières par x, on aurait entre elles la relation

$$y = x.$$

Dans ce cas, la suite des points $M, M' \ldots$ (fig. 7) forme évidemment une ligne droite inclinée de 50° sur l'axe AX.

Si l'on savait, au contraire, que, dans toute l'étendue de la courbe, chaque PM est moyenne proportionnelle entre les distances du point P (fig. 8), à deux points fixes A et B pris sur l'axe AB, en représentant toujours AP par x, PM par y, et nommant $2a$ la distance AB, on aurait, d'après la condition proposée,

$$y^2 = x(2a - x),$$

ou

$$y^2 = 2ax - x^2.$$

Cette équation fait connaître y, lorsque l'on se donne x, et réciproquement : elle suffit donc pour trouver autant que l'on voudra de lignes PM et de points $M, M' \ldots$ qui se trouveront tous sur la courbe proposée. Il est visible d'ailleurs, d'après la propriété d'où nous sommes partis, que cette courbe est une circonférence de cercle, décrite sur AB comme diamètre.

14. Puisque chacune des équations

$$y = x$$
$$y^2 = 2ax - x^2$$

peut servir à trouver autant de points que l'on voudra sur la droite ou sur le cercle dont elles énoncent une propriété générale, il est évident que ces équations sont équivalentes à la construction actuelle de ces lignes, et qu'elles peuvent être employées pour les représenter.

On peut, en généralisant ce résultat, regarder toutes les lignes courbes comme susceptibles d'être ainsi représentées par des équations entre deux variables indéterminées ; et, réciproquement, on voit qu'une équation quelconque, entre deux indéterminées, peut être interprétée géométriquement, et considérée comme représentant une ligne courbe, dont elle peut faire trouver successivement tous les points.

15. Cette manière d'envisager les rapports de la géométrie et de l'algèbre est beaucoup plus étendue et plus féconde que celle que nous avions considérée d'abord, et qui se bornait aux problêmes de géométrie déterminés ; on peut même la généraliser encore, et l'appliquer aux équations à trois variables qui représentent des surfaces, comme on le verra par la suite ; mais pour le moment, les considérations précédentes nous suffiront. Je ne me proposais ici que de fixer précisément, et de faire bien comprendre cette division qui partage l'application de l'algèbre à la géométrie en deux branches distinctes et totalement séparées dans leur objet. Elles l'ont été de même dans l'histoire des mathématiques ; l'invention de la dernière est due à Descartes. Avant ce grand homme, on n'avait appliqué l'algèbre qu'aux problêmes de géométrie déterminés. Il ouvrit ainsi une route nouvelle, et l'on peut dire qu'il fraya le chemin à Newton.

16. Après avoir jeté un coup-d'œil en avant sur la carrière que nous allons parcourir, et tracé la route que nous devons suivre, il faut revenir en arrière, et former les méthodes nécessaires pour avancer ensuite facilement.

La première chose à faire à cet égard, c'est de chercher un procédé direct pour énoncer les problêmes de géométrie dans le langage de l'algèbre, afin d'être toujours assuré de pouvoir les mettre en équation. C'est à quoi

nous parviendrons, en considérant qu'une question de géométrie peut toujours se réduire, en dernière analyse, à trouver un ou plusieurs points disposés suivant des conditions données ; d'où il suit que, pour atteindre le but proposé, il faut chercher comment on peut exprimer en analyse la position des points de l'espace.

L'espace, tel que les géomètres le considèrent, est une étendue indéfinie dans laquelle on conçoit que tous les corps sont placés. On ne peut donc y déterminer le lieu absolu des corps, mais seulement leurs situations relatives, qui sont les seules dont la connaissance nous soit nécessaire : et, pour cela, on rapporte ces points à des objets fixes, dont on suppose que la position est connue.

Sur un plan, on conçoit deux droites AX, AY, faisant entre elles un angle quelconque donné (fig. 9) ; tout point M, situé dans le plan, est déterminé lorsqu'on connaît les longueurs des droites MQ, MP, menées de ce point parallèlement aux lignes AX, AY, et terminées à ces lignes ; car par les propriétés des parallèles $AQ = PM$, et $AP = QM$. On peut donc, en connaissant ces valeurs, mener les droites PM et MQ, qui, par leur intersection, déterminent le point M.

Dans l'espace, on conçoit trois plans YAX, XAZ, ZAY, faisant entre eux des angles donnés (fig. 10). Un point quelconque M se trouve déterminé de position, quand on connaît les longueurs des droites MM', MM'', MM''', menées par ce point parallèlement aux intersections des trois plans, et terminées à ces plans; car alors on peut mener trois plans parallèles à ceux-ci, et sur lesquels il se trouve.

Avant d'examiner les conséquences qui résultent des conventions précédentes, il est bon d'observer qu'en gé-

néral nous prendrons les mots plan et ligne droite dans leur acception la plus étendue; c'est-à-dire, qu'en général nous entendrons, par ligne droite, une ligne droite indéfiniment prolongée, et par plan, un plan indéfiniment étendu. Lorsqu'il sera nécessaire de considérer des portions limitées de plans ou de droites, nous en avertirons, comme nous venons de le faire; mais ces abstractions seront toujours déterminées par les conditions particulières de la question proposée.

Des points et de la ligne droite considérés sur un plan.

17. Lorsque les points M, M', d'un plan sont rapportés à deux lignes fixes, AX, AY, menées dans ce plan, les longueurs QM, $Q'M'$, ou leurs égales AP, AP', se nomment ***abscisses***, et les distances PM, $P'M'$, ou leurs égales AQ, AQ', s'appellent *ordonnées* (fig. 9). La ligne AX, sur laquelle se comptent les longueurs AP, AP', se nomme l'***axe des abscisses***; AY est l'***axe des ordonnées.*** Les ordonnées et les abscisses se désignent encore par la dénomination générale de *coordonnées*; les lignes AX, AY, sont alors les axes des coordonnées, et le point A, où elles se coupent, en est l'*origine*. Le choix des axes est absolument arbitraire; et l'on peut, à volonté, compter les abscisses ou les ordonnées sur l'un ou sur l'autre.

18. Représentons en général par x les abscisses, et par y les ordonnées; x et y seront des variables qui prendront diverses valeurs pour les différens points que l'on devra considérer (fig. 9). Si, par exemple, ayant mesuré les longueurs AP, PM, qui déterminent le point M, on trouve la première égale à a, et la seconde égale à b,

on aura, pour fixer la position de ce point, les deux équations

$$x = a \qquad y = b;$$

et, comme elles suffisent pour cet objet, nous les nommerons les équations du point M.

Si l'abscisse AP restant la même, l'ordonnée PM diminue, le point M s'approche de plus en plus de l'axe AX; si PM ou b devient nulle, le point M tombe en P sur l'axe des x lui-même; et ses équations deviennent

$$x = a \qquad y = 0.$$

Si l'ordonnée PM restant la même, l'abscisse AP diminue, le point M s'approche de plus en plus de l'axe AY, avec lequel il finira par coïncider, si AP devient nulle; ce qui donne

$$x = 0 \qquad y = b$$

pour les équations d'un point tel que Q, situé sur l'axe même des y.

Enfin, si l'abscisse AP et l'ordonnée PM deviennent nulles en même tems, le point M coïncide avec le point A, origine des coordonnées, et l'on a

$$x = 0 \qquad y = 0$$

pour les équations de cette origine.

19. On voit par là qu'en supposant aux variables x et y toutes les valeurs positives possibles, depuis zéro jusqu'à l'infini, on peut exprimer la position de tous les points placés dans l'angle YAX.

Quant aux points compris dans les autres angles formés par les axes, ils répondent aux valeurs négatives des variables x et y.

Pour le démontrer, concevons qu'au lieu de AY on prenne pour axe des y la ligne $A'\,Y'$ parallèle à la première, et telle que $AA'=A$ (fig. 11). Nommons x' les nouvelles abscisses comptées sur le même axe AX, mais à partir de la nouvelle origine A'. Cela posé, si nous considérons un point quelconque M situé dans l'angle $Y'A'\,X$, nous aurons

$$AP=AA'+A'P \qquad \text{ou } x=A+x';$$

mais, si nous considérons un point M' situé dans l'angle $Y'A'A$, et que nous représentions encore son abscisse $A'P'$ par la variable x', en lui supposant toutefois une valeur quelconque, nous aurons

$$AP'=AA'-A'P' \qquad \text{ou } x=A-x';$$

d'où l'on voit que, si l'on veut rendre la même formule analytique $\qquad x=A+x'$
applicable à-la-fois aux points situés dans l'angle $XA'Y'$ et aux points situés dans l'angle $AA'Y'$, il faut regarder pour ceux-ci les valeurs de x' comme négatives, en sorte que le changement de signe réponde à leur changement de position par rapport à l'axe $A'Y'$.

Pour confirmer cette conséquence, et faire voir encore plus clairement comment la formule précédente peut lier les différens points du plan, supposons que l'on considère d'abord un point situé sur l'axe $A'Y'$ lui-même : pour ce point x' sera nul, et la formule

$$x=A+x' \qquad \text{donnera } x=A.$$

C'est la valeur de l'abscisse AA' par rapport aux axes AX, AY.

Mais si l'on veut que cette même équation convienne aussi aux points situés sur l'axe AY, considérons un

quelconque d'entre eux; son abscisse x sera nulle, et la formule précédente donnera

$$A+x'=0 \qquad \text{ou } x'=-A;$$

ce qui est encore la valeur de l'abscisse AA', en la supposant rapportée à l'axe $A'Y'$. L'expression analytique de cette abscisse devient donc positive pour l'axe AY, et négative pour l'axe $A'Y'$, quand on suppose les points du plan liés entre eux par l'équation

$$x=A+x'.$$

Ce résultat s'applique également aux valeurs négatives de x, et prouvent qu'elles appartiennent aux points situés du côté de l'axe AY, opposé aux valeurs positives ; car, quel que soit celui de ces points que l'on considère, si on le représente par M'', on pourra toujours mener un nouvel axe $A''Y''$, qui se trouvera placé par rapport à l'axe AY, comme celui-ci l'était précédemment lui-même par rapport à l'axe $A'Y'$.

En transportant l'axe AX parallèlement à lui-même, et fixant la nouvelle origine en A'' (fig. 12); faisant $AA''=B$, et nommant y' les nouvelles ordonnées comptées à partir de l'axe $A''X''$, on aura

$$y=B+y'$$

pour les points situés dans l'angle $YA''X''$, et

$$y=B-y'$$

pour ceux qui sont situés dans l'angle $AA''X''$: en sorte que, pour comprendre les uns et les autres dans une même formule analytique, il faut regarder les valeurs négatives de y' comme correspondantes à des points situés du côté de l'axe $A''X''$ opposé aux y' positives ; et,

comme cela s'applique également aux axes AX, AY, on en doit conclure que les changemens de signe de la variable y répondent au changement de position des points de part ou d'autre de l'axe des abscisses.

En réunissant ces résultats, on voit que les valeurs négatives des coordonnées doivent être prises en sens contraire de leurs valeurs positives; sans quoi, les mêmes formules ne pourraient pas s'appliquer à tous les points du plan, et ne comprendraient que ceux qui seraient situés dans un même angle des axes. Réciproquement, la convention précédente étant établie, tous les points du plan, quelle que soit leur situation, sont compris dans les mêmes formules.

On aura, d'après ce qui précède, (fig. 9)

dans l'angle YAX	x positif et y positif,
dans l'angle YAx	x négatif y positif,
dans l'angle XAy	x positif y négatif,
dans l'angle xAy	x négatif y négatif,

par conséquent, les équations

$$x = a \qquad y = b,$$

qui déterminent la position d'un point dans l'angle YAX, deviendront

$$x = -a \qquad y = +b$$
$$x = +a \qquad y = -b$$
$$x = -a \qquad y = -b,$$

selon que ce point passera dans un des angles YAx, XAy, xAy. En supposant a et b quelconques, les deux premières pourront représenter toutes les autres.

20. La liaison que nous venons de découvrir entre les signes des variables x et y, et leurs positions par rapport

Digitized by Google

à leur origine commune, n'a pas lieu seulement lorsque leurs valeurs sont comptées sur des lignes droites ; cette liaison subsiste toutes les fois que l'on représente les valeurs d'une quantité variable par des longueurs comptées sur une ligne quelconque, et à partir d'un même point.

Soit, par exemple, une circonférence de cercle $AB\,ab$, dont Aa est un diamètre, et dont le centre est au point C (fig. 13) : si l'on veut représenter les valeurs positives d'une variable x par les arcs AM, AM', comptés à partir du point A, et dans le sens AB, il faudra représenter les valeurs négatives de la même variable par des arcs Am, Am', comptés à partir du même point A, et dans le sens opposé au premier, sans quoi ces arcs ne pourront pas être compris avec les précédens dans une même formule analytique.

En effet, si l'on conçoit l'origine transportée en A', et qu'on représente par x' les valeurs des arcs, comptées de ce point, on aura, en faisant $AA' = a$,

$$x = a + x'$$

pour les points situés au-delà du point A', et

$$x = a - x'$$

pour les points situés entre le point A' et le point A. Ainsi, pour que la même formule $x = a + x'$ convienne aux uns et aux autres, il faut regarder le changement de signe de x' comme répondant au changement de position des arcs par rapport à la nouvelle origine.

Avec cette convention, si l'on fait $x' = 0$, on aura $x = a$ pour la valeur de l'arc AA' comptée à partir du point A, tandis qu'en faisant $x = 0$, on aura $x' = -a$ pour la valeur de ce même arc rapportée au point A'.

Et, comme ces raisonnemens sont applicables à l'origine

A aussi bien qu'à l'origine A', on doit en conclure que les arcs négatifs doivent être pris en sens contraire des arcs positifs, pour que les uns et les autres puissent être compris dans les valeurs successives d'une même variable x.

Maintenant, si l'on abaisse les perpendiculaires MP, $M'P'$, qui seront les sinus des arcs positifs AM, AM', ces lignes doivent être prises positivement ; car, depuis zéro jusqu'à 100°, l'arc est plus petit que sa tangente, et plus grand que son sinus ; et, dans ces limites, les sinus et les tangentes, tombant du même côté de l'axe AC, sont nécessairement de même signe. Par la même raison, les sinus mp, $m'p'$, des arcs négatifs Am, Am', seront négatifs : cela devait d'ailleurs résulter de ce que ces sinus, qui peuvent se compter, à partir du point C, sur la ligne Bb perpendiculaire à Aa, sont opposés aux premiers comptés sur la même ligne, et à partir du même point. Une fois cette direction connue, tous les sinus, quel que soit l'arc auquel ils répondent, doivent être pris positivement au-dessus du diamètre Aa, et négativement au-dessous.

Quant au cosinus, pour le point A, où l'arc est nul, il est égal au rayon CA ; et, pour le point a, où l'arc est de 200°, il est égal à Ca : si donc nous le supposons positif dans le premier cas, il faudra le regarder comme négatif dans le second ; mais le choix est absolument libre, seulement il faut observer la même loi par rapport aux lignes situées de part et d'autre du point C sur la ligne ACa.

Les signes des sinus et des cosinus étant déterminés, d'après les conventions précédentes, selon leur position dans les différens quarts de cercle, ceux de toutes les autres lignes trigonométriques s'en déduisent ; car ces

lignes peuvent toujours être exprimées rationnellement, en fonction des sinus et des cosinus auxquels elles répondent, de sorte que l'on connaîtra leurs signes d'après ceux que prennent ces quantités.

On peut donc, à l'aide des principes précédens, expliquer sans difficulté la marche des valeurs que prennent les lignes trigonométriques suivant les différens arcs auxquels elles répondent. Quoique cet exemple nous ait un peu écartés de notre objet, j'ai cru devoir le donner, parce qu'il demande des considérations assez délicates, et qu'il est très-propre à faire sentir comment on doit raisonner dans tous les cas de cette nature.

21. On peut encore, à l'aide de ce qui précède, trouver analytiquement l'expression de la distance de deux points dont on connaît les coordonnées rectangles.

Soient M', M'', les points dont il s'agit (fig. 14) : si l'on mène $M'Q'$ parallèle à l'axe des x, et terminée aux coordonnées $M'P'$, $M''P''$, le triangle $M'M''Q'$, rectangle en Q', donnera,

$$M'M'' = \sqrt{\overline{M'Q'}^2 + \overline{M''Q'}^2}.$$

Soient maintenant x', y', x'', y'', les coordonnées AP', $P'M'$, AP'', $P''M''$; $M'Q'$ sera $x''-x'$, et $M''Q'=y''-y'$. Si donc on représente par D la distance cherchée, on aura

$$D = \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2}.$$

Si un des points, par exemple, celui dont les coordonnées sont x', y', était l'origine même des coordonnées, on aurait

$$x'=0, \quad y'=0;$$

ce qui donnerait

$$D = \sqrt{x''^2 + y''^2}.$$

C'est l'expression de la distance d'un point quelconque à l'origine des coordonnées. Il est aisé de s'en convaincre sur la figure même, où M représente le point dont il s'agit (fig. 15); car le triangle AMP, rectangle en P, donne

$$\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2 = x^2 + y^2;$$

d'où

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

22. Reprenons maintenant en particulier chacune des deux équations $x = a$, $y = b$, qui fixent la position d'un point sur un plan, a et b étant des quantités quelconques.

La première, $x = a$, considérée comme si elle existait seule, et prise dans son sens le plus étendu tant qu'on ne considère que deux dimensions, convient à tous les points dont l'abscisse est égale à a (fig. 9). Or, si nous supposons $AP = a$, tous les points de la ligne PM, prolongée indéfiniment dans les deux sens, satisferont à cette condition. L'équation $x = a$ appartient donc à la ligne droite PM, parallèle à l'axe des y.

On prouvera de même que l'équation $y = b$ exprime une propriété qui convient à tous les points de la ligne QM prolongée indéfiniment dans les deux sens.

Ainsi, en disant que le point M est déterminé par le système des équations

$$x = a \quad y = b,$$

on écrit qu'il est donné par l'intersection de deux droites parallèles aux axes AX, AY; ce qui est la traduction littérale de la construction géométrique qui sert à le trouver.

La ligne droite, représentée par l'équation $x = a$, sera située toute entière du côté des abscisses positives, si a est positif : au contraire, si a est négatif, elle se trouvera du côté des abscisses négatives ; si a est nul, elle coïncidera avec l'axe des y, dont l'équation est par conséquent

$$x = 0.$$

Il est visible en effet que cette propriété est commune à tous les points qui y sont situés, et n'appartient qu'à eux seuls.

De même, suivant que b sera positif ou négatif, la ligne droite, dont l'équation est $y = b$, sera située au-dessus ou au-dessous de l'axe des x ; et, si b est nul, elle coïncidera avec cet axe, dont l'équation est par conséquent

$$y = 0.$$

Enfin, le point A, origine des coordonnées, étant à la fois sur ces deux axes, sera donné par le système des deux équations,

$$x = 0 \qquad y = 0,$$

comme nous l'avons trouvé précédemment.

23. La méthode que nous avons employée pour exprimer analytiquement la position d'un point, peut donc servir encore à désigner une suite de points situés sur une même ligne droite parallèle à un des axes des coordonnées. En généralisant ce résultat, on voit que, si tous les points d'une ligne quelconque, droite ou courbe, sont tels qu'il existe la même relation entre les ordonnées et les abscisses de chacun d'eux, l'équation entre x et y, qui exprimera cette relation, doit caractériser cette ligne. Réciproquement, l'équation étant donnée, la nature de la courbe s'ensuit ; car si l'on veut trouver ceux de ses points qui répondent à une abscisse déterminée, il suffira

de mettre cette valeur pour x dans l'équation ; et celle-ci, ne contenant plus alors que la seule inconnue y, fera connaître les valeurs des coordonnées correspondantes, qu'il faudra placer, par rapport à l'axe des x, conformément aux signes dont elles sont affectées : de même en se donnant y, l'équation fera connaître les valeurs correspondantes de x.

Une équation qui exprime ainsi la relation qu'ont entre elles les abscisses et les ordonnées de chaque point d'une ligne, se nomme l'*équation de cette ligne*; et celle-ci est continue ou discontinue, suivant que la même équation convient ou ne convient pas à tous les points dont elle est composée.

24. Considérons, par exemple, une ligne droite AM (fig. 16) menée par l'origine des coordonnées, et faisant un angle α avec l'axe des x, l'angle des deux axes étant égal à β : si d'un point quelconque M, pris sur cette droite, on mène l'ordonnée PM parallèle à l'axe des y, on aura toujours

$$\frac{PM}{\sin \alpha}=\frac{AP}{\sin. (\beta-\alpha)} \text{ ou } y=x\frac{\sin \alpha}{\sin (\beta-\alpha)};$$

et cette équation ayant lieu pour tous les points de la droite AM, est l'équation de cette droite.

Quoique nous l'ayons obtenue en considérant les points situés dans l'angle YAX, elle n'en est pas moins applicable aux points situés dans les autres angles des axes, pourvu qu'on y change convenablement le signe des variables x et y. Si l'on y fait, par exemple, x négatif, pour avoir les points situés du côté des abscisses négatives, elle donnera

$$y=-\frac{x\sin \alpha}{\sin (\beta-\alpha)};$$

c'est-à-dire, que, pour ces points, y devient aussi négative, de sorte qu'ils sont situés au-dessous de l'axe des x, tandis que ceux qui sont situés dans l'angle XAY sont au-dessus du même axe : nous supposons ici que $\sin\alpha$ est une quantité positive.

Cette valeur de α est la même pour tous les points de la même droite AM; mais elle varie d'une droite à une autre : examinons les circonstances qui résultent de cette variation.

A mesure que α diminue, la droite s'incline vers l'axe des abscisses, avec lequel elle se confond lorsque $\alpha = 0$: aussi cette supposition donne-t-elle $y = 0$ pour son équation. A mesure que α augmente, la droite approche de se confondre avec l'axe des y, avec lequel elle coïncide quand $\beta = \alpha$; car, alors, $\sin(\beta - \alpha)$ devenant nul, l'équation se réduit à $x = 0$. L'angle α continuant à augmenter, $(\beta - \alpha)$ devient une quantité négative ; alors $\sin(\beta - \alpha)$ est négatif et égal à $-\sin(\alpha - \beta)$, et l'équation de la droite devient

$$y = -\frac{x \sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)};$$

elle se trouve alors placée dans la situation AM', et c'est ce que l'équation précédente confirme ; car tant que x est positif, elle donne y négatif, et l'on ne peut avoir y positif qu'en prenant x négatif : ce qui indique que la droite reste au-dessous de l'axe des x du côté des abscisses positives, et ne passe au-dessus de cet axe que du côté des abscisses négatives.

α devenant égal à $200°$, la droite se confond de nouveau avec l'axe des x; c'est ce que la formule indique, car on a alors $\sin\alpha = 0$, ce qui donne $y = 0$ pour l'équation de la droite.

Enfin, α devenant plus grand que 200°, sin α est négatif, aussi bien que sin $(\beta-\alpha)$, et l'équation de la droite redevient comme précédemment,

$$y=x\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Le coefficient $\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$ reprend alors des valeurs positives : en effet, la droite se trouve alors placée dans la situation AM'' ; et, comme elle est indéfinie, elle reprend successivement, après cette révolution, les positions qu'elle occupait.

On voit, par cette discussion, que la formule

$$y=x\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

est applicable à toutes les droites qui passent par l'origine des coordonnées.

25. Considérons maintenant une droite qui fasse, ainsi que la précédente, l'angle α avec l'axe des abscisses, mais qui ne passe plus par l'origine des coordonnées (fig. 17) ; et, comme elle ne serait pas déterminée par cette seule condition, supposons, de plus, qu'elle coupe l'axe des y dans un point A', tel que AA' soit égal à b : si on lui mène, par l'origine des coordonnées, une parallèle AN, dont l'équation sera

$$y=x\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)},$$

la valeur de l'ordonnée PM se composera, pour un point quelconque, de la partie MN, qui est égale à AA' ou à b, et de l'ordonnée PN, dont la valeur est $\frac{x\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$.

En réunissant ces deux quantités, on aura l'expression de

l'ordonnée PM ou y de la droite proposée, qui sera

$$y = \frac{x \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} + b.$$

C'est l'équation la plus générale d'une ligne droite, quand on ne considère que deux dimensions; et elle renferme deux indéterminées α et b, parce qu'il faut deux conditions pour particulariser la droite.

Il est facile de reconnaître, par la forme même de cette équation, que tous les points auxquels elle appartient sont situés sur une ligne droite, car on en tire

$$\frac{y - b}{x} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}.$$

Si on regarde le même point M comme un quelconque de ceux qui satisfont à cette équation, et que, par le point A', pour lequel $AA' = b$, on mène une parallèle $A'Q$ à l'axe des x, QM sera $y - b$, $A'Q$ sera égal à x; et, puisque, par la nature de l'équation, le rapport de $y - b$ à x est constant, on aura

$$\frac{MQ}{A'Q} = \frac{M'Q'}{A'Q'}, \text{ etc.}$$

et ainsi de suite pour tous les points M, M' qui vérifieront l'équation proposée; d'où il suit que les triangles $A'MQ$, $A'M'Q'$, etc. sont semblables, et par conséquent tous ces points sont en ligne droite.

On peut retrouver de même toutes les autres circonstances relatives à cette ligne, car d'abord le rapport constant $\frac{MQ}{A'Q}$ étant égal à $\frac{\sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$, l'angle $MA'Q = \alpha$; de plus, quand $x = 0$, on a $y = b$, et par conséquent $A'A = b$, on a donc un point de la droite, et l'angle qu'elle fait

avec l'axe des x : on pourra donc la construire d'après ces données.

Si l'on veut connaître le point où elle coupe l'axe des x, il faudra supposer y nulle ; ce qui a lieu pour tous les points situés sur cet axe. Cette supposition donne

$$x = -b\,\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha};$$

et l'on voit, par le signe de cette valeur, que, si α est moindre que β, b étant positif, la droite coupera l'axe des x du côté des abscisses négatives; ce qu'il était d'ailleurs facile de prévoir.

En supposant x négatif et plus grand que la valeur précédente, on aura les ordonnées de la droite au-delà du point B; et ces valeurs seront négatives, parce qu'elle passe alors au-dessous de l'axe des abscisses.

Ainsi, non-seulement l'équation.

$$y = \frac{x \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} + b$$

appartient à tous les points d'une ligne droite, qui fait, avec l'axe des x, un angle α, et qui rencontre l'axe des y à une distance b de l'origine, mais cette équation suffit pour caractériser la ligne droite dont il s'agit, et trouver sa position par rapport aux axes des coordonnées.

26. Les variables x et y ne se trouvent qu'au premier degré dans cette équation, et n'y sont pas multipliées entre elles. D'après cette considération, on nomme *linéaire* toute équation de cette forme, quelque nombre de variables qu'elle renferme.

27. Cette propriété des formules analytiques, de pouvoir s'appliquer aux lignes dans toute leur étendue, résulte, comme nous l'avons dit plus haut, de la liaison qui existe

entre les changemens de signe des variables x et y, et les changemens de position des lignes qu'elles représentent par rapport à l'origine.

28. Jusqu'ici nous avons supposé que l'angle β, formé par les axes des coordonnées, était quelconque, le plus souvent on prend cet angle droit, et on lui donne cette valeur, parce qu'elle contribue à simplifier les calculs, on a alors

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin(100° - \alpha) = \cos \alpha,$$

et l'équation de la droite devient

$$y = x \tang \alpha + b$$

comme il est facile de le vérifier *à posteriori*, en observant que, par la nature de la ligne droite, la relation

$$\frac{y-b}{x} = \tang \alpha$$

est toujours satisfaite, quel que soit celui de ses points que l'on considère.

En faisant, pour plus de simplicité, $\tang \alpha = a$, nous aurons

$$y = ax + b$$

pour l'équation de la ligne droite lorsque les coordonnées sont rectangulaires : a est la tangente trigonométrique de l'angle que fait la droite avec l'axe des x, et b représente la distance de l'origine au point où elle coupe l'axe des y ; ou, ce qui revient au même, c'est la valeur de l'ordonnée correspondante à $x = 0$.

29. Tant que a et b sont indéterminés, la situation de la ligne n'est pas connue, et l'on sait seulement que ses points sont en ligne droite ; mais si ces valeurs sont données, ou si l'on a des conditions qui les déterminent, on en déduit la position de la droite.

La recherche des coefficiens a et b, d'après des conditions données, et la combinaison des lignes qui en résultent, donnent lieu aux questions suivantes, dont il importe de retenir les solutions, parce qu'elles servent dans presque tous les cas où l'on applique le calcul à la géométrie.

30. Trouver l'équation d'une ligne droite qui passe par deux points donnés.

Soient x', y', x'', y'', les coordonnées de ces points; la ligne cherchée devant être droite, son équation sera de la forme

$$y = ax + b,$$

a et b étant encore inconnus.

Pour qu'elle passe par le point dont les coordonnées sont x', y', il faut que son équation soit satisfaite quand on y met x' pour x et y' pour y; ce qui exige qu'on ait

$$y' = ax' + b.$$

Pour qu'elle passe par le point dont les coordonnées sont x'', y'', il faudra de même que

$$y'' = ax'' + b.$$

Ces deux équations feront connaître a et b. En substituant leurs valeurs dans l'équation de la droite, elle sera déterminée.

L'élimination peut se faire très-simplement, en retranchant la seconde équation de la première, et la troisième de la seconde, car on a par ce moyen,

$$y - y' = a(x - x')$$
$$y' - y'' = a(x' - x'');$$

d'où l'on tire

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \qquad a = \frac{y' - y''}{x' - x''}.$$

La première de ces équations est celle de la droite cherchée, et la seconde détermine l'angle qu'elle fait avec l'axe des x. Il est aisé de vérifier *à posteriori*, que les conditions demandées se trouvent ainsi satisfaites, car $x=x'$ donne $y=y'$, et $x=x''$ donne $y=y''$.

Si $\qquad y'-y''=0 \quad$ on a $a=0$,

et il vient $\qquad y=y''$;

c'est-à-dire qu'alors la droite est parallèle à l'axe des x; et cela a lieu en effet, puisqu'elle passe par les extrémités de deux ordonnées égales.

Si $\qquad x'-x''=0 \quad$ on a $\dfrac{1}{a}=0$,

et il vient $\qquad x=x''$;

c'est-à-dire qu'alors la droite fait un angle droit avec l'axe des abscisses, et devient par conséquent parallèle à l'axe des y; ce qu'il était facile de prévoir.

Il est visible que la méthode dont nous venons de faire usage peut encore être employée pour faire passer une ligne droite par deux points donnés, dans le cas où les coordonnées ne seraient pas rectangulaires.

31. Trouver les conditions nécessaires pour qu'une droite soit parallèle à une autre.

Soit $\qquad y=ax+b$

l'équation de la droite donnée; a et b étant connus, celle de la droite cherchée sera de la forme

$$y=a'x+b',$$

a' et b' étant inconnus.

Pour que les droites soient parallèles, il faut qu'elles fassent le même angle avec l'axe des x; ce qui donne

$$a=a',$$

et l'équation de la parallèle devient

$$y = ax + b';$$

b' reste encore indéterminé, parce qu'il y a une infinité de droites qui sont parallèles à la ligne donnée.

Mais, si l'on veut que cette parallèle passe par un point donné, et dont les coordonnées soient x', y', il faudra qu'on ait

$$y' = ax' + b'.$$

Cette équation fait connaître b' ; en la combinant avec la précédente, il vient

$$y - y' = a(x - x')$$

pour l'équation de la parallèle menée par le point donné à la droite donnée.

32. Trouver l'angle de deux droites dont les équations sont données.

Soit $y = ax + b$ l'équation de la première droite,
$y = a'x + b'$ celle de la seconde.

La première droite fait avec l'axe des x un angle α, dont la tangente trigonométrique est a. La seconde droite fait avec le même axe un angle α', dont la tangente est a'. L'angle cherché est donc $\alpha' - \alpha$: or on a, par les formules trigonométriques,

$$\text{tang}(\alpha' - \alpha) = \frac{\text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\alpha}{1 + \text{tang}\,\alpha' \,\text{tang}\,\alpha}.$$

En nommant donc V l'angle des deux droites, on aura

$$\text{tang}\,V = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Si elles sont parallèles, l'angle V est nul, et tang $V = 0$; ce qui donne $a' = a$, comme nous l'avons déja vu.

Si elles sont perpendiculaires l'une à l'autre, l'angle V est droit, et sa cotangente est nulle; l'expression de cette cotangente est en général $\frac{1+aa'}{a'-a}$: pour qu'elle soit nulle, il faut qu'on ait

$$aa'+1=0.$$

C'est la condition nécessaire pour que deux droites soient perpendiculaires l'une à l'autre, et, si l'une des quantités a, a' est connue, l'autre sera déterminée par cette équation.

33. Trouver les points d'intersection de deux droites dont on connait les équations.

Soit $y=ax+b$ l'équation de la première,
$y=a'x+b'$ celle de la seconde.

Le point d'intersection devant se trouver à-la-fois sur les deux droites, ses coordonnées doivent satisfaire à-la-fois à leurs deux équations : réciproquement, en écrivant que les deux équations ont lieu en même tems, on aura les valeurs de x et y, qui conviennent au point d'intersection; et on trouve, par l'élimination,

$$x=-\frac{(b-b')}{a-a'} \qquad y=\frac{ab'-a'b}{a-a'}.$$

Quand $a=a'$, ces valeurs deviennent infinies, c'est-à-dire qu'alors il n'y a plus de point d'intersection, ou en d'autres termes, qu'il est infiniment éloigné, mais aussi dans ce cas, les droites sont parallèles.

34. La méthode que nous venons d'employer est générale, et peut servir à déterminer les points d'intersection de deux lignes courbes quelconques, situées dans un même plan, quand on connaît leurs équations; car, ces points devant se trouver à-la-fois sur les deux courbes, leurs coor-

données doivent satisfaire en même tems aux équations de l'une et de l'autre : ainsi, en combinant ces deux équations, les valeurs que l'on obtiendra pour y et pour x seront les coordonnées des points d'intersection.

Il faut donner beaucoup d'attention au principe que nous indiquons ici, et qui consiste à combiner analytiquement plusieurs équations, pour en déduire le résultat commun qui satisfait à leur ensemble. L'*Élimination*, considérée sous ce point de vue, renferme presque tout le secret de l'application de l'algèbre à la géométrie, et j'aurai soin d'en faire remarquer les effets à mesure qu'ils se présenteront.

35. Mener par un point donné une perpendiculaire à une droite donnée, et trouver la longueur de la portion de cette perpendiculaire comprise entre le point et la droite.

Soit $y = ax + b$ l'équation de la droite donnée,
x', y' les coordonnées du point donné.

La perpendiculaire étant une ligne droite, et devant passer par ce point, son équation sera de cette forme :

$$y - y' = a'(x - x').$$

La condition d'être perpendiculaire donnera

$$aa' + 1 = 0 \qquad \text{d'où } a' = -\frac{1}{a},$$

et l'on aura par conséquent

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

C'est l'équation de la perpendiculaire menée par le point donné à la droite donnée.

Pour le point d'intersection de ces deux droites, leurs équations devront avoir lieu en même tems : ainsi, en

représentant les coordonnées de ce point par x'', y'', on aura, pour les déterminer,

$$y'' = ax'' + b,$$

$$y'' - y' = -\frac{1}{a}(x'' - x').$$

Pour faire l'élimination avec plus de facilité, on mettra la première de ces deux équations sous la forme

$$y'' - y' = a(x'' - x') + b + ax' - y';$$

et, en la combinant avec la suivante, on en tirera

$$x'' - x' = \frac{(y' - ax' - b)a}{1 + a^2}, \quad y'' - y' = -\frac{(y' - ax' - b)}{1 + a^2};$$

a, b, x', y', étant des quantités connues, les coordonnées x'' y'' du point d'intersection se trouvent ainsi déterminées.

Cherchons maintenant la longueur de la portion de perpendiculaire comprise entre le point et la droite donnée ; l'expression de cette longueur est

$$\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}.$$

En la représentant par P, et mettant pour $x'' - x'$ et $y'' - y'$ leurs valeurs, il vient

$$P = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

pour la longueur de la perpendiculaire cherchée.

36. A l'aide de ce qui précède, on peut résoudre toutes les questions qui ne dépendent que de la ligne droite, et qui sont relatives à des points situés dans un même plan. Nous allons maintenant étendre ces résultats au cas général où l'on ne fait abstraction d'aucune des dimensions de l'espace.

Des Points de la Ligne droite considérés en trois dimensions ou dans l'espace.

37. Nous avons dit qu'un point de l'espace est déterminé de position lorsque l'on connaît les longueurs et les directions de trois droites menées de ce point parallèlement à trois plans, et terminées à ces plans. Pour plus de simplicité, nous supposerons ceux-ci rectangulaires; alors, si on les représente par YAX, XAZ et ZAY, et qu'on sache qu'un point M est placé à une distance MM' du premier, MM'' du second, et MM''' du troisième (fig. 18), il suit de la propriété qu'ont les deux plans parallèles d'être également éloignés l'un de l'autre dans tous leurs points, que, si l'on mène aux distances données trois plans $M'''MM''$, $M'''MM'$, $M''MM'$, respectivement parallèles aux précédens, le point M se trouvera à leur rencontre mutuelle.

Les plans rectangulaires YAX, XAZ, ZAY, auxquels on rapporte les points de l'espace, se nomment les *plans coordonnés* : ils se coupent deux à deux, suivant trois droites, AX, AY, AZ, passant toutes trois par le point A, et perpendiculaires entre elles.

D'après les propriétés des plans parallèles, la distance MM' du point M au plan YAX, distance que nous avons figurée dans l'espace, peut se mesurer sur la ligne AZ, et elle est égale à AR.

De même, la distance MM'' peut se mesurer sur la ligne AY, et elle est égale à AQ.

Enfin, la distance MM''' peut se mesurer sur la ligne AX, et elle est égale à AP; on voit qu'il en serait de même pour tout autre point de l'espace.

Les droites AZ, AY, AX, sur lesquelles nous

compterons désormais les distances respectives des points de l'espace aux plans YAX, XAZ, ZAY, se nomment les *axes des coordonnées*, dont le point A est l'origine. Nous représenterons en général par x les distances qui se comptent sur la dernière, qui sera l'axe des x; nous désignerons par y celles qui se comptent sur la ligne des AY, qui sera l'axe des y, et nous désignerons par z celles qui se comptent sur l'axe AZ, qui sera l'axe des z.

Si donc, ayant mesuré les trois distances AP, AQ, AR, on les trouve égales à a, b, c, on aura, pour déterminer la position du point M, les trois équations

$$x = a \qquad y = b \qquad z = c;$$

et comme elles suffisent pour cet objet, nous les nommerons les *équations du point M*.

Les positions des points M', M'', M''' que l'on appelle les *projections* du point M sur les trois plans coordonnés, se trouvent déterminées par ces équations, car on en tire

$$y = b \qquad x = a$$

pour les coordonnées du point M', projection du point M sur le plan YAX;

$$x = a \qquad z = c$$

pour les coordonnées du point M'' projection du point M sur le plan XAZ;

$$z = c \qquad y = b$$

pour les coordonnées du point M''', projection du point M sur le plan ZAY.

On voit, par la composition des équations précédentes, que deux de ces projections étant données, la troisième s'ensuit nécessairement. Dans la construction, on les dé-

duit facilement les unes des autres ; car M'' et M''', par exemple, étant données, on mènera $M'''Q$ et $M''P$ parallèles à AZ, puis QM' et PM' respectivement parallèles aux lignes AX, AY; M' sera la troisième projection du point M.

38. Il résulte de ce qui précède que tous les points de l'espace étant rapportés à trois plans perpendiculaires entre eux, les points de chacun de ces plans se trouvent naturellement rapportés à deux droites perpendiculaires entre elles, qui sont les intersections de ce plan avec les deux autres.

Ainsi, désignant chaque plan par les coordonnées qui lui sont propres, le plan YAX sera celui des x et des y, le plan XAZ celui des x et z, et le plan ZAY celui des y et z : nous ferons désormais usage de ces dénominations.

Ce que nous avons dit plus haut sur la manière dont doivent être prises les coordonnées négatives, s'applique aux axes AX, AY, AZ ; et il s'ensuit que les signes des coordonnées x, y, z, feront connaître la situation de chaque point de part et d'autre des trois plans coordonnés. Il ne faut pas perdre de vue que ces plans sont indéfiniment étendus, et que les droites AX, AY, AZ, sont indéfiniment prolongées de part et d'autre de leur origine commune.

39. Reprenons maintenant en particulier chacune des trois équations

$$x=a \qquad y=b \qquad z=c$$

qui déterminent la position d'un point dans l'espace ; a, b, c, étant quelconques.

La première $x=a$, considérée comme si elle existait seule, convient à tous les points dont l'abscisse AP est

égale à a. Elle appartient par conséquent au plan $MM''PM'$, supposé indéfiniment étendu dans tous les sens; car tous les points de ce plan, qui est parallèle au plan ZAY, satisfont à cette condition. De même, l'équation $y=b$ convient à tous les points du plan $MM'''QM'$, mené par le point M parallèlement au plan ZAX; et enfin l'équation $z=c$ convient à tous les points du plan $MM''RM'''$, qui est mené par le point M parallèlement au plan XAY, ces plans devant toujours être regardés comme indéfinis.

Par conséquent, le système des trois équations

$$x=a \qquad y=b \qquad z=c$$

signifie que le point auquel elles appartiennent est situé en même tems sur trois plans parallèles aux plans coordonnés, et dont les distances à ceux-ci sont représentées par a, b, c; ce qui est la traduction de la construction géométrique de laquelle nous sommes partis.

Ces distances devenant nulles, les équations

$$x=0 \qquad y=0 \qquad z=0$$

sont celles des plans coordonnés eux-mêmes. La première appartient au plan des yz; la seconde au plan des xz, et la troisième au plan des xy : leur ensemble a lieu pour le point A, origine des coordonnées, puisque ce point est leur commune intersection.

40. Au moyen de ce qui précède, il est facile d'exprimer la distance de deux points dont on connaît les coordonnées (fig. 19); car soient m, M, ces deux points, dont les coordonnées seront x, y, z; x', y', z'; si, par le premier, on mène une ligne droite mQ' parallèle au plan des xy, et terminée à l'ordonnée MM', on aura

$$\overline{Mm}^2 = \overline{MQ'}^2 + \overline{mQ'}^2.$$

MQ' est égale à $M'M - mm'$, ou à $z' - z$; mQ' égale $M'm'$. Si, par le point m', on mène $m'Q$ parallèle à l'axe des x, $M'Q$ sera $y' - y$; $m'Q$ sera $x' - x$, et l'on aura

$$\overline{M'm'}^2 = \overline{M'Q}^2 + \overline{m'Q}^2 = (y - y')^2 + (x - x')^2.$$

En substituant ces valeurs, il viendra

$$\overline{Mm}^2 = (z - z')^2 + \overline{M'm'}^2 = (z - z')^2 + (y - y')^2 + (x - x')^2.$$

Nommant donc D la distance cherchée, on aura

$$D = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

C'est l'expression de la distance de deux points quelconques de l'espace.

On peut remarquer, dans cette expression, que $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$, sont les projections de la droite D sur les trois axes des x, y, z; d'où résulte ce théorème : Le carré d'une portion quelconque de ligne droite est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois axes rectangulaires.

Si le point m coïncide avec l'origine A des coordonnées, la formule précédente devient

$$D = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

C'est la distance d'un point quelconque de l'espace à l'origine des coordonnées (fig. 20) : en effet, les triangles AMM', $AM'P$, étant rectangles, l'un en M', l'autre en P, donnent

$$\overline{AM}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{AM'}^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{M'P}^2 + \overline{AP}^2 = z^2 + y^2 + x^2,$$

comme nous venons de le trouver.

On voit par ce résultat que le carré de la diagonale d'un parallélipipède rectangle est égal à la somme des carrés de ses trois arêtes.

41. Maintenant que nous savons exprimer la position des points dans l'espace, cherchons la relation qui doit exister entre les coordonnées d'une suite de points, pour qu'ils soient situés en ligne droite.

Pour cela, il suffit de remarquer que, si plusieurs points sont en ligne droite dans l'espace, leurs projections sont aussi en ligne droite sur chacun des plans coordonnés.

En effet, la projection d'un point sur un plan est le pied de la perpendiculaire menée du point sur ce plan : si plusieurs points sont en ligne droite, cette droite est dans un même plan avec les perpendiculaires menées de ses points, et par conséquent les pieds de toutes ces perpendiculaires sont sur une même ligne droite.

Ce plan qui contient toutes les perpeudiculaires menées des divers points de la droite, se nomme *plan projetant*, et son intersection avec le plan coordonné est la *projection de la droite*.

Une droite est déterminée quand on connaît deux plans qui la contiennent ; elle le sera quand on connaîtra deux de ses plans projetans ; or, ceux-ci sont déterminés quand on a les projections par lesquelles ils passent : ainsi une droite est déterminée quand on connaît ses projections sur deux des plans coordonnés. Par conséquent, les équations de ces projections sur les plans des xz et des yz étant

$$x = az + \alpha, \quad y = bz + \beta,$$

leur ensemble fixe dans l'espace la position de la droite ; si elle passe par l'origine, α et β seront nuls.

Ces considérations sont faciles à vérifier. En effet, l'équation

$$x = az + \alpha$$

exprimant une relation indépendante de y, n'appartient

pas seulement à la ligne droite qui est la projection de la proposée sur le plan des x et z, elle convient aussi à tous les points du plan mené perpendiculairement à celui des x et z par cette projection, puisque, pour ces points, la relation des x et z est encore la même.

Semblablement, l'équation

$$y = bz + \beta,$$

lorsqu'on la considère à part, a lieu, quelles que soient les valeurs de x, puisqu'elle est indépendante de cette variable : elle n'appartient donc pas seulement à la projection de la droite proposée sur le plan des y et z, elle convient au plan projetant mené par cette projection.

Par conséquent, le système des deux équations

$$x = az + \alpha \qquad y = bz + \beta$$

signifie que la droite proposée se trouve en même tems sur deux plans donnés, et voilà pourquoi leur ensemble détermine sa position. On voit aussi par là que les variables x, y, z, de ces équations, expriment les coordonnées des points de la droite, coordonnées qui doivent avoir entre elles les relations déterminées par ces équations.

La droite étant ainsi particularisée, sa projection sur le troisième plan doit résulter de ces données. En effet, en éliminant z entre les deux équations précédentes, on trouve

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} \text{ ou } y-\beta = \frac{b}{a}(x-\alpha).$$

Les coordonnées x et y, qui entrent dans le résultat, appartiennent aux points de la droite ; elles indiquent le lieu où tombent les perpendiculaires abaissées de ces

points sur le plan des xy. La suite de ces coordonnées forme donc la projection de la droite ; et la relation qui existe entre leurs valeurs montre que cette projection est elle-même une ligne droite, ou, ce qui revient au même, c'est l'équation du plan projetant. Il est visible que cette équation, avec une des précédentes, suffirait aussi pour caractériser la droite.

Il suit de là qu'il faut, en général, deux équations pour fixer la position d'une droite dans l'espace, et ces deux équations sont celles de deux plans sur lesquels la droite se trouve.

Lorsque a, b, α, β, sont connues, les équations

$$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta$$

ne laissent qu'une des variables indéterminée ; on peut donc alors se donner les valeurs de cette dernière, et les équations feront connaître les valeurs correspondantes des deux autres; on pourra donc obtenir les coordonnées d'un nombre quelconque de points situés sur la droite.

A ce procédé analytique répond une construction géométrique fort simple. Si l'on construit les deux projections de la droite sur ceux des plans coordonnés où elles se trouvent, ce qui est facile, ces projections tiendront lieu de leurs équations ; alors, en prenant à volonté une des coordonnées, elles feront connaître les deux autres.

Soient, par exemple, $A'''M'''$, $A''M''$, ces deux projections (fig. 21) : si l'on prend à volonté $z = AR$, que, par le point R, on mène RM'', RM''', parallèles aux axes des x et des y, et que des points M'', M''', on mène les ordonnées $M''P$, $M'''Q$, les lignes AP, AQ, seront les valeurs de x et de y correspondantes à

$z = AR$. Menant PM' QM', respectivement parallèles aux axes AY, AX, les points M', M'', M''', seront les trois projections du point cherché sur les plans coordonnés.

De même, si l'on donnait d'abord $x = AP$, on aurait ensuite

$$PM'' = z,$$

et, achevant la construction comme précédemment, on trouverait

$$y = AQ.$$

La construction serait la même, si l'on employait la projection de la droite sur le plan des xy, avec une des deux précédentes.

Lorsqu'une droite est située dans un des plans coordonnés, sa projection sur les deux autres se confond avec les axes eux-mêmes. Si, par exemple, elle se trouve dans le plan des xz, on a

$$b = 0 \qquad \beta = 0,$$

et ses équations deviendraient

$$y = 0 \qquad x = az + \alpha.$$

La première exprime que la projection de la droite sur le plan des yz se confond avec l'axe des z, et la seconde représente sa projection sur le plan des xz, laquelle se confond dans ce cas avec la droite elle-même.

La recherche des coefficiens a, b, α, β, d'après des conditions données, et la combinaison des lignes droites qui en résultent, donnent lieu dans l'espace à des questions analogues à celles qui se sont présentées à nous en deux dimensions, et leur résolution n'est pas d'une moindre utilité : nous allons les discuter successivement.

42. Mais, auparavant, nous ferons une remarque importante; c'est que les procédés dont nous venons de faire usage peuvent également servir à indiquer la succession des points d'une ligne courbe quelconque située d'une manière quelconque dans l'espace. En effet, il suffit que l'on connaisse les projections de cette courbe sur deux des plans coordonnés, pour qu'elle soit déterminée entièrement; or, ces projections elles-mêmes sont des lignes courbes situées dans les plans coordonnés. Ainsi, lorsque l'on connaîtra les équations de ces courbes, on pourra, pour chaque valeur donnée d'une des variables x, y, z, trouver les valeurs correspondantes des deux autres; ce qui déterminera dans l'espace, sur la courbe proposée, le point qui répond à ces valeurs. La suite de ces points peut fort bien n'être pas de nature à être contenue toute entière dans un plan; et c'est ce caractère qui constitue les courbes que l'on appelle à double courbure.

Et, de même que les projections d'une ligne droite sont les traces des deux plans projetans qui la contiennent et qui la donnent par leur intersection, les deux projections d'une ligne courbe quelconque sont les traces de deux surfaces cylindriques dont les arêtes sont perpendiculaires aux plans coordonnés, et qui, se pénétrant mutuellement dans l'espace, donnent la courbe proposée par leur intersection. La dénomination de *surface cylindrique* est prise ici dans un sens plus général que celui qu'on lui attribue pour l'ordinaire dans les Élémens de Géométrie, où on l'emploie pour désigner une surface engendrée par une ligne droite qui se meut parallèlement à elle-même, de manière à passer toujours par un des points d'une circonférence de cercle. Ce mouvement d'une droite parallèlement à elle-même est ce qui cons-

titue en général les surfaces cylindriques ; et c'est la nature des courbes directrices qui établit des différences entre ces surfaces.

43. Trouver les équations d'une ligne droite qui passe par deux points donnés.

Soient x', y', z', x'', y'', z'', les coordonnées de ces points, la ligne cherchée aura ses équations de cette forme.

$$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta,$$

a, b, α, β, étant encore inconnues : pour qu'elle passe par les points dont les coordonnées sont x', y', z', il faut que ces équations soient satisfaites, quand on y met x' pour x, y', pour y, z, pour z ; ce qui exige qu'on ait

$$x' = az' + \alpha$$
$$y' = bz' + \beta.$$

Pour qu'elle passe par le point dont les coordonnées sont x'', y'', z'', il faudra de même qu'on ait

$$x'' = az'' + \alpha$$
$$y'' = bz'' + \beta.$$

Ces équations font connaître a, b, α, β; et, en substituant leurs valeurs dans l'équation de la droite, elle se trouvera déterminée.

En opérant sur ces équations comme sur celles de l'article 30, on trouvera

$$(x-x') = a(z-z') \qquad x'-x'' = a(z'-z'')$$
$$(y-y') = b(z-z') \qquad y'-y'' = b(z'-z'');$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{x' - x''}{z' - z''}, \qquad b = \frac{y' - y''}{z' - z''}$$

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z'),$$

Ces deux dernières sont les équations de la droite cherchée ; les deux autres font connaître les angles que font avec l'axe des z ses projections sur les plans des xz et des yz. Il est aisé de s'assurer que ces expressions renferment les conditions exigées.

44. Trouver les conditions nécessaires pour que deux droites soient parallèles dans l'espace.

Soient $\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\}$ les équations de la première,

$\left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{array}\right\}$ celles de la seconde.

Si ces droites sont parallèles, leurs plans projetans seront parallèles, et les intersections de ces plans avec les plans coordonnés, ou, ce qui est la même chose, les projections des droites sur chacun d'eux, seront respectivement parallèles. Ainsi, pour que les conditions demandées soient remplies, il faut qu'on ait

$$a = a' \qquad b = b',$$

et les équations de la parallèle deviennent

$$x = az + \alpha' \quad y = bz + \beta',$$

α' et β' restant encore indéterminées, parce qu'il y a une infinité de droites qui sont parallèles à la proposée.

On peut vérifier ces résultats d'une manière fort simple. Si l'on détermine α, α', β, β', de manière que les deux parallèles passent par un même point ; dont les coor-

données soient x', y', z', on trouvera qu'elles coïncideront dans toute leur étendue.

45. Trouver l'angle de deux droites dont on a les équations.

Soient $\left.\begin{array}{l} x=az+\alpha \\ y=bz+\beta \end{array}\right\}$ les équations de la première,

$\left.\begin{array}{l} x=a'z+\alpha' \\ y=b'z+\beta' \end{array}\right\}$ celles de la seconde.

Nous remarquerons d'abord qu'il n'en est pas dans l'espace comme sur un plan où deux droites se rencontrent toujours, à moins qu'elles ne soient parallèles. Dans l'espace, deux droites peuvent se croiser sous différens angles sans se rencontrer, et leur inclinaison se mesure, dans tous les cas, par celle de deux droites qui leur seraient respectivement parallèles, et qui passeraient par un même point. Menons donc, par l'origine, deux droites respectivement parallèles à chacune des précédentes, leurs équations seront

$\left.\begin{array}{l} x=az \\ y=bz \end{array}\right\}$ pour la première.

$\left.\begin{array}{l} x=a'z \\ y=b'z \end{array}\right\}$ pour la seconde.

Prenons sur la première un point quelconque, dont r' soit la distance à l'origine; prenons aussi sur la seconde un autre point dont la distance à cette même origine soit r'', et nommons D la distance de ces deux points entre eux. Cela posé dans le triangle formé par les trois droites r', r'' et D, l'angle V compris entre les deux premières sera donné par la formule

$$\cos V=\frac{r'^2+r''^2-D^2}{2r'r''};$$

il ne reste plus qu'à déterminer r', r'' et D.

Pour cela, x', y', z' étant les coordonnées du premier point, on aura d'abord les équations

$$x'=az' \quad y'=bz' \quad r'^2=x'^2+y'^2+z'^2.$$

Les deux premières signifient que ce point est sur la droite, et la troisième signifie que sa distance a l'origine en r'. Les valeurs de x' et de y' étant substituées dans cette dernière, elles donnent

$$r'^2=z'^2\{1+a^2+b^2\},$$

et par suite

$$z'=\frac{r'}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\ x'=\frac{ar'}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\ y'=\frac{br'}{\sqrt{1+a^2+b^2}};$$

pour le second point, puisqu'il est déterminé par des conditions analogues, on aura de même

$$x''=a'z'',\quad y''=b'z'',\quad r''^2=x''^2+y''^2+z''^2,$$

d'où l'on tirera semblablement

$$r''^2=z''^2\{1+a'^2+b'^2\};$$

et par suite,

$$z''=\frac{r''}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}},\ x''=\frac{a'r''}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}},\ y'=\frac{b'r''}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}.$$

On a ainsi les valeurs de r' et de r'' : quant à celle de D^2, elle a pour expression (40)

$$D^2=(x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2,$$

d'où en développant, l'on tire

$$r'^2+r''^2-D^2=2\{x'x''+y'y''+z'z''\}.$$

Substituant dans ce résultat pour x', y', z', x'', y'', z'' leurs valeurs, on a

$$r^2+r'^2+r''^2-D^2=\frac{2r'r''\{1+aa'+bb'\}}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2}}.$$

Ainsi, en mettant cette valeur dans l'expression de $\cos V$, il vient

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\,\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

C'est le cosinus de l'angle formé par deux droites qui se croisent d'une manière quelconque dans l'espace.

Si elles sont perpendiculaires, ce cosinus est nul, ce qui exige qu'on ait

$$1 + aa' + bb' = 0.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que deux droites soient perpendiculaires dans l'espace.

46. S'il arrivait qu'une des droites fût parallèle à un des plans rectangulaires, quelques-unes des quantités a, b, a', b' pourraient devenir nulles ou infinies. Mais, en introduisant directement ces suppositions dans les équations des lignes droites, on verrait facilement les valeurs que leurs coefficiens doivent prendre; et ces valeurs, substituées dans la formule générale, la modifieraient convenablement pour le cas dont il s'agit; de sorte que l'on aurait ainsi le même résultat que si l'on eût opéré en particulier sur le cas proposé.

Par exemple, si l'une de ces droites est l'axe des z lui-même, les équations de cet axe sont

$$x = 0 \qquad y = 0.$$

Il faudra donc que les équations d'une des droites, par exemple celles de la seconde, qui sont

$$x = a'z \qquad y = b'z,$$

s'accordent avec les précédentes, quel que soit z, ce qui exige qu'on fasse

$$a' = 0 \qquad b' = 0.$$

La première condition signifie que la droite entre toute

entière dans le plan des yz, puisque sa projection sur le plan des xz fait avec l'axe des z un angle dont la tangente trigonométrique est égale à zéro. La seconde condition exprime de même que la projection de la droite sur le plan des yz coïncide avec l'axe des z. Or, d'après ce que l'on vient de voir, cette projection est la droite elle-même, puisque a' est nul, et il viendra, en représentant par Z la valeur correspondante V,

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

C'est le cosinus de l'angle qu'une droite fait avec l'axe des z. On trouvera de même, en nommant X et Y les angles que cette droite fait avec les axes des y et des x,

$$\cos Y = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \qquad \cos X = \frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}};$$

car les équations de l'axe des y sont

$$x = 0 \qquad z = 0,$$

pour que les équations

$$x = a'z \qquad y = b'z$$

s'accordent avec elles, quel que soit y, il faut que l'on fasse $\frac{1}{b'} = 0$ ou b' infini, a' ne l'étant point, la première condition signifie que la projection de la droite sur le plan des YZ fait avec l'axe des Z un angle de 100 grades, dont la tangente trigonométrique est infinie. Ou en d'autres termes, elle signifie que le plan projetant de la droite sur le plan des YZ est le plan des XY lui-même. La seconde condition que a' ne soit pas infinie, exprime que l'autre projection de la droite sur le plan des XZ diffère de l'axe des X, et que, par conséquent, l'autre plan projetant de la droite n'est pas celui des XY. En effet, en réunissant

ces deux conditions, la droite se trouve à-la-fois dans le plan des XY, et dans un autre plan différent de celui-ci, mais qui contient aussi l'axe des Y. Elle ne peut donc être que cet axe, puisqu'elle est leur commune intersection. En effet en recommençant le calcul de l'angle V avec les équations $x=0$, $z=0$, on trouverait

$$\cos Y = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

De même les équations de l'axe des x sont

$$y=0 \qquad z=0,$$

pour faire accorder avec elles les équations de la droite, quel que soit x, il faut supposer $\frac{1}{a'}=0$, ou a' infini, b' ne l'étant point.

La première de ces équations signifie que la projection de la droite, sur le plan des XZ est l'axe des x lui-même, et la seconde exprime que l'autre plan projetant qui contient aussi l'axe des x diffère du plan des yx.

Si l'on élève au carré les valeurs précédentes de $\cos X$, $\cos V$, $\cos Z$ on aura, en les ajoutant,

$$\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z = 1.$$

Ce qui établit une relation entre les cosinus des angles que fait une droite quelconque avec les axes des coordonnées, et cette relation consiste en ce que la somme des carrés de ces trois cosinus est égale au carré du rayon.

47. Il est facile de vérifier les formules précédentes (fig. 23), car, si d'un point quelconque M, situé sur une droite AM qui passe par l'origine, on abaisse les perpendiculaires MM', MM'', MM''', sur les trois plans coordonnés, les triangles AMM', AMM'', AMM''' seront rectangles, le premier en M', le second en M'', le troisième en M''', et ils donneront

$$\cos Z = \frac{MM'}{AM} \quad \cos Y = \frac{MM''}{AM} \quad \cos X = \frac{MM'''}{AM}.$$

Or MM', MM'', MM''', sont respectivement égaux à z, y, x; de plus, $AM = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. On a donc

$$\cos Z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cos Y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cos X = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Le point M étant sur la droite, ses coordonnées sont assujetties aux équations $x = az$, $y = bz$. En vertu de ces relations, les variables x, y, z, disparaissent des formules précédentes, qui donnent ainsi

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \cos Y = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \cos X = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

valeurs absolument semblables à celles que nous avons trouvées plus haut.

48. Il est visible que les angles Z, Y, X sont complémens des angles MAM', MAM'', MAM''', que fait la droite AM avec les plans coordonnés, on aura donc en nommant ceux-ci U', U'', U''',

$$\sin U' = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \sin U'' = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \sin U''' = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Ce sont les sinus des angles que forme une droite quelconque avec les plans des xy, des xz et des yz.

49. L'expression que nous avons trouvée plus haut pour le cosinus de l'angle de deux droites, peut se modifier d'une manière très-élégante au moyen des résultats précédens. En effet, en nommant Z, Y, X, Z', Y', X', les cosinus des angles formés par les deux droites avec les trois axes des z, y, x, on a

$$\cos Z = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \cos Y = \frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \cos X = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

$$\cos Z' = \frac{1}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}} \cos Y' = \frac{b'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}} \cos X' = \frac{a'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}.$$

Au moyen de ces valeurs, l'équation

$$\cos V = \frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}$$

devient

$$\cos V = \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z',$$

et le cosinus de l'angle des deux droites se trouve ainsi exprimé au moyen des cosinus des angles que forment ces droites avec les trois axes rectangulaires des coordonnées.

50. Trouver les conditions nécessaires pour que deux droites se coupent dans l'espace, et, lorsque ces conditions sont remplies, trouver leur point d'intersection.

Soient $x = az + \alpha \quad x = a'z + \alpha'$
$y = bz + \beta \quad y = b'z + \beta'$

les équations des droites données : si elles se coupent, les coordonnées du point d'intersection devront satisfaire aux équations de l'une et de l'autre. Ainsi, en nommant x', y', z' ces coordonnées, il faudra qu'on ait en même tems

$$x' = az' + \alpha \qquad x' = a'z' + \alpha'$$
$$y' = bz' + \beta \qquad y' = b'z' + \beta'.$$

Ces quatre équations étant plus que suffisantes pour déterminer les trois inconnues x', y', z', conduiront à une équation de condition entre les seules quantités a, b; α, β; a', b'; α', β', qui déterminent la position des droites : en effet, en éliminant d'abord x' et y', on trouve

$$(a - a')z' + \alpha - \alpha' = 0 \qquad (b - b')z' + \beta - \beta' = 0,$$

et ensuite, en éliminant z',

$$(a - a')(\beta - \beta') - (\alpha - \alpha')(b - b') = 0.$$

C'est la condition nécessaire pour que les deux droites se coupent : si elle est remplie, il suffira de considérer trois quelconques des équations précédentes, pour avoir les valeurs de x', y', z', qui seront

$$z'=\frac{\alpha'-\alpha}{a-a'} \text{ ou } z'=\frac{\beta'-\beta}{b-b'}, x'=\frac{a\alpha'-a'\alpha}{a-a'}, y'=\frac{b\beta'-b'\beta}{b-b'}.$$

Ces valeurs deviennent infinies lorsque $a=a'$ et $b=b'$, alors l'équation de condition est vérifiée, ainsi les droites se coupent, mais leur point d'intersection est infiniment éloigné, et il est visible en effet que, dans ce cas, elles sont parallèles.

A l'aide de ces formules, on peut résoudre toutes les questions de géométrie qui ne sont relatives qu'à la ligne droite.

51. La même méthode servirait en général pour trouver les points d'intersection de deux courbes dont les projections seraient données; car, ces points étant communs aux deux courbes, leurs coordonnées devraient satisfaire à-la-fois aux équations qui les représentent, c'est-à-dire aux équations de leurs projections. Cette considération donnera généralement quatre équations entre les trois variables x', y', z', c'est-à-dire une de plus qu'il n'en faut pour les déterminer. Ainsi, en éliminant ces variables, on parviendra à une équation de condition qui devra être satisfaite pour que les deux courbes puissent se couper, et cette équation exprimera les relations qui doivent exister pour cet objet entre les quantités constantes qui déterminent la forme des deux courbes et leurs positions dans l'espace.

Quoique la méthode exposée dans ce numéro soit exacte, elle a besoin de quelques développemens. Elle donne bien la condition nécessaire pour que deux courbes se rencontrent dans l'espace, mais on n'y a pas eu égard au nombre des points d'intersection.

Soient $\quad x=\varphi(z) \quad y=\psi(z)$,

les deux équations des projections de la première courbe, et

$$x=\varphi'(z) \quad y=\psi'(z),$$

celles de la seconde, les caractéristiques ϕ, ψ, φ', ψ', désignant des fonctions quelconques des z; ces quatre équations devront subsister en même tems pour les points d'intersection des deux courbes : cette considération donne d'abord

$$(1)\quad \varphi(z) = \varphi'(z);\quad \psi(z) = \psi'(z);\quad (2)$$

en éliminant z entre les deux derniers, on aura l'équation de condition dont nous avons parlé, les équations (1) et (2) seront toutes deux satisfaites pour une même valeur de z, et les courbes auront un point d'intersection.

Mais, généralement, cette considération ne donnera aux équations (1) et (2) qu'une racine commune, il n'en résultera donc en général qu'un seul point commun : si l'on voulait que les deux courbes en eussent deux, il faudrait donner aux équations en z deux racines communes, ce qui se ferait en supprimant le premier facteur commun, et en cherchant les conditions nécessaires pour qu'elles en eussent encore un autre après cette préparation. Généralement, il faudra établir entre les équations autant de racines communes que l'on voudra avoir de points d'intersection entre les deux courbes; de sorte qu'il y aura définitivement autant d'équations de condition que de points d'intersection.

Pour représenter ces conditions par la géométrie, il faut considérer que les valeurs de z qui satisfont à l'équation (1) donnent les points qui peuvent être communs aux projections des deux courbes sur le plan des xz, ou plutôt elles font connaître les ordonnées z qui leur appartiennent. L'équation (2) exprime une condition analogue pour les projections relatives au plan des yz. Mais cela ne suffit pas encore pour que les deux courbes se rencontrent dans l'espace. Il faut que les points où les projections se rencontrent correspondent à un même point de l'espace, c'est-à-dire qu'ils se trouvent deux à deux sur un même plan projetant.

Du Plan.

52. On a vu plus haut qu'une ligne courbe est caractérisée lorsque l'on a une équation qui exprime la relation qui doit exister entre les abscisses et les ordonnées de chacun de ses points : il en est de même des surfaces ; leur nature est déterminée quand on a une équation entre les coordonnées x, y, z des points qui leur appartiennent ; car, en se donnant à volonté les valeurs de deux de ces variables, l'équation fera connaître la valeur de la troisième, et le point dont elles seront les coordonnées sera sur la surface, et non ailleurs.

Si, par exemple, on se donne des valeurs de x et de y, que nous représenterons par

$$x = a \quad y = b,$$

en prenant sur les axes des x et des y $AP = a$, $AQ = b$, et menant les parallèles PM', QM', à ces axes, on déterminera le point M', qui sera la projection du point cherché sur le plan des x, y (fig. 18) ; l'équation, donnant ensuite la valeur correspondante de z, détermine la longueur de l'ordonnée $M'M$, et par conséquent la position du point M de la surface. Il suit de là qu'une équation entre trois variables x, y, z, représente une surface, de même qu'une équation entre deux variables représente une ligne ; et l'on dit que la surface est continue ou discontinue, suivant que toutes ses parties sont ou ne sont pas assujetties à une même équation.

53. Cela posé, cherchons la relation qui doit exister entre les coordonnées x, y, z, pour que cette surface soit un plan.

La manière la plus simple de concevoir la génération d'une surface plane, c'est de la regarder comme le lieu de toutes les perpendiculaires menées à une même droite

par un de ses points. Soient x', y', z', les coordonnées de ce point, on aura

$$\left.\begin{array}{l} x-x'=a\,(z-z') \\ y-y'=b\,(z-z') \end{array}\right\}$$ pour les équations de la droite.

Celles d'une droite qui passera par le même point, seront

$$x-x'=a'\,(z-z')$$
$$y-y'=b'\,(z-z')\,;$$

et, si cette droite est perpendiculaire à la précédente, on aura (nº. 45)

$$1+aa'+bb'=0\,;$$

a' et b' sont constantes pour une même perpendiculaire, mais variables d'une perpendiculaire à une autre. Si donc on met dans la dernière équation, pour ces quantités, leurs valeurs en x, y, z tirées des deux précédentes, le résultat n'indiquera plus laquelle des perpendiculaires on a considérée; il n'appartiendra par conséquent à aucune d'elles en particulier, mais il exprimera une relation qui leur convient à toutes : cette relation sera donc celle qui doit exister entre les coordonnées du plan qui les contient. L'élimination donne

$$z-z'+a\,(x-x')+b\,(y-y')=0\,;$$

et, comme les quantités a, b, qui déterminent la position de la première droite, sont absolument arbitraires, ainsi que x', y', z', cette équation peut servir à représenter un plan quelconque.

En y faisant $\quad x=0 \quad y=0,$

elle donne $\quad z=z'+ax'+by'.$

C'est la valeur de l'ordonnée AC du plan à l'origine (fig. 24). En la représentant par c, l'équation du plan devient

$$z+ax+by-c=0$$

et l'on voit qu'elle est linéaire par rapport aux variables

x, y, z. Elle renferme trois coefficiens constans et arbitraires a, b, c, parce qu'il faut en général trois conditions pour déterminer la position d'un plan dans l'espace. Si $c = 0$, le plan passe par l'origine même des coordonnées.

En faisant $y = 0$, on aura l'intersection CD du plan avec celui des xz, (fig. 24) car c'est la propriété commune à tous les points qui y sont situés. Il viendra ainsi

$$y = 0 \qquad z + ax - c = 0$$

pour les équations de cette intersection : la première exprime que sa projection sur le plan des xy, est l'axe des x lui-même ; et cela doit être ainsi, puisque cette intersection est toute entière dans le plan des xz. La tangente trigonométrique de l'angle que cette droite forme avec l'axe des x, est représentée par $-a$ (n°. 28).

En faisant de même $x = 0$, on obtiendra l'intersection CD' du plan avec celui des yz, et ses équations seront

$$x = 0 \qquad z + by - c = 0.$$

La tangente trigonométrique de l'angle que cette ligne forme avec l'axe des y, est représentée par $-b$.

Enfin, en faisant $z = 0$, on obtiendra l'intersection DD' du plan avec celui des xy, et elle aura pour équations

$$z = 0 \qquad ax + by - c = 0.$$

Ces intersections se nomment aussi les *traces du plan*.

Considérons d'abord les deux premières : en y supposant $y = 0$, $x = 0$, elles donnent toutes deux pour z la même valeur $z = c$. Ces droites passent donc toutes deux par un même point C de l'axe des z, l'ordonnée AC de ce point étant égale à c.

Les projections de la droite à laquelle le plan est perpendiculaire, ont pour équations

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z).$$

En les comparant avec celles des traces mises sous la forme

$$x=-\frac{1}{a}z+\frac{c}{a} \quad y=-\frac{1}{b}z+\frac{c}{b},$$

on voit (n°. 32) qu'elles leur sont respectivement perpendiculaires, d'où il suit que, lorsqu'un plan est perpendiculaire à une droite dans l'espace, les projections de la droite sont perpendiculaires aux traces du plan : c'est ce qu'il est facile de démontrer par la géométrie. Car, si une droite est perpendiculaire à un plan, les plans projetans de cette droite sont perpendiculaires à ce plan et aux plans coordonnés : ils sont par conséquent perpendiculaires aux traces du plan proposé. Ces traces doivent donc être aussi perpendiculaires aux intersections des plans projetans avec les plans coordonnés, c'est-à-dire aux projections de la droite.

En faisant $z=0$ dans les équations des traces CD, CD' relatives aux plans des xz et des yz, elles donnent

$$z=0 \quad y=0 \quad x=\frac{c}{a} \text{ pour la première ;}$$

$$z=0 \quad x=0 \quad y=\frac{c}{b} \text{ pour la seconde.}$$

Ce sont les coordonnées des points D, D', où ces traces coupent les axes des x et des y ; et ces coordonnées satisfont aux équations de la troisième trace DD', qui sont

$$z=0 \quad ax+by-c=0,$$

parce que cette trace passe par les points d'intersection des axes AX, AY, avec les deux autres traces.

On peut aussi parvenir à l'équation du plan en le concevant engendré par le mouvement d'une des traces, qui glisse sur l'autre en restant parallèle à elle-même ; car, soient

$y = 0$, $z + ax - c = 0$ les équations de la trace CD sur le plan des xz,

$x = 0$, $z + by - c = 0$ celles de la trace CD' sur le plan des yz.

C'est la forme la plus générale qu'elles puissent avoir, puisqu'elles doivent se couper sur l'axe des z. Si la seconde se meut parallèlement à elle-même, elle aura, dans une quelconque de ses positions EF, des équations de cette forme

$$x = \alpha \qquad z + by - \beta = 0,$$

α et β étant constantes pour la même position, et variables d'une position à l'autre. La première de ces deux équations indique que la droite reste toujours parallèle au plan des yz; la seconde, que sa projection sur ce plan est parallèle à la trace donnée.

En faisant $y = 0$, on aura le point E, où la trace, dans son mouvement, rencontre le plan des x et z; ses coordonnées seront

$$x = \alpha \qquad z = \beta.$$

Pour que ce point d'intersection se trouve sur la trace CD, il faut qu'il y ait entre ses coordonnées la relation

$$z + ax - c = 0$$

exprimée par l'équation de cette trace; ce qui établit entre α et β la condition

$$\beta + a\alpha - c = 0.$$

Ainsi, dans toutes les positions de la droite génératrice, il existe entre les coordonnées d'un quelconque de ses points, les équations suivantes :

$$x = \alpha \qquad z + by - \beta = 0 \qquad \beta + a\alpha - c = 0.$$

Si l'on élimine entre elles α et β, on obtiendra un résultat indépendant de ces quantités, qui, convenant toujours aux points situés sur la droite génératrice, et n'étant plus particulier pour une de ses positions, appartiendra au plan qu'elle décrit. Cette élimination donne

$$z + ax + by - c = 0$$

pour l'équation du plan ; ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé plus haut.

54. On voit aussi, par cette méthode, que l'équation du plan restera toujours du premier degré, par rapport aux variables x, y, z, lors même que ces variables représenteraient des coordonnées obliques, car quelle que soit l'inclinaison des coordonnées, les équations des deux droites génératrices seront toujours du premier degré en x, y, z (n°. 25), et le raisonnement, par lequel l'équation du plan se déduit de ses traces, sera toujours le même, dans tous les cas.

55. Les deux exemples précédens, quoique fort simples, suffisent pour faire concevoir comment on peut trouver en général l'équation d'une surface, lorsqu'on sait qu'elle peut être engendrée par une ligne courbe qui glisse sur une autre ligne suivant des conditions données.

En effet, pour qu'une des deux courbes puisse être considérée comme mobile, il faut que sa position ne soit pas complettement déterminée. Il est donc nécessaire qu'il entre dans son équation quelque constante arbitraire qui puisse prendre différentes valeurs relatives à ses différentes positions. Telles étaient dans le problême précédent, les quantités α et β qui dépendaient de la position de la droite génératrice.

Or, dans chaque position des deux courbes, il existe une équation de condition qui doit être satisfaite pour qu'elles puissent se rencontrer (n°. 51) ; et cette équation

indique les rapports qui doivent exister pour cet effet entre les quantités constantes qui déterminent leurs positions respectives. Si on laisse subsister cette équation de condition, et qu'on en chasse deux de ces quantités constantes par la substitution de leurs valeurs en fonction des variables x, y, z tirées des équations des deux courbes, le résultat, dégagé de ces constantes, deviendra indépendant de la position particulière que l'on avait considérée d'abord : il appartiendra donc à tous les points de l'espace, dont les coordonnées x, y, z sont telles, qu'ils se trouvent sur l'une ou l'autre des deux courbes, lorsque ces courbes sont placées de manière à pouvoir se rencontrer.

Si les deux équations de la courbe mobile ne renferment que deux constantes arbitraires, telles que α et β dans le problême précédent, l'équation de condition, débarrassée de ces constantes par l'élimination, ne contiendra plus que les variables x, y, z et des quantités connues : elle représentera par conséquent *une surface* engendrée par la courbe mobile.

Mais si les deux équations de cette courbe contiennent plus de deux constantes arbitraires, on ne pourra pas, *en général* les chasser toutes à-la-fois de l'équation de condition: par conséquent le résultat en x, y, z donnera autant de surfaces différentes que l'on pourra donner de valeurs aux constantes arbitraires qui n'ont pu être éliminées.

Ainsi, dans ce cas, l'équation finale représentera une suite de surfaces, ou le *lieu solide* de tous les points de l'espace qui peuvent se trouver sur la courbe génératrice dans son mouvement.

Cela serait arrivé, par exemple, dans le problême précédent, si les quantités a et b, qui déterminent la direction de la droite génératrice, eussent pu être quelconques, au lieu de rester constamment les mêmes. Alors la génératrice, au lieu de rester parallèle à elle-même, aurait

pu prendre toutes les directions possibles autour de chaque point de la droite fixe ; et de là serait résulté, non pas une surface plane, mais un solide qui aurait compris tous les points de l'espace, et se serait étendu à l'infini dans tous les sens.

56. Afin de rendre les calculs symétriques, nous mettrons l'équation du plan sous cette forme :

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

qui n'est pas plus générale que la précédente avec laquelle elle coïncide lorsqu'elle est divisée par C : c'est l'équation complette du premier dégré entre trois variables.

57. On peut reconnaître *à posteriori* et d'après la nature de cette équation, qu'elle appartient à une surface plane; car une ligne droite menée par deux points quelconques pris sur cette surface, coïncidera avec elle dans toute son étendue. En effet, les équations de cette droite seront de la forme

$$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta.$$

Soient x', y', z' les coordonnées d'un des points qui y sont situés : ces coordonnées auront entre elles les relations exprimées par les équations précédentes, c'est-à-dire

$$x' = az' + \alpha$$
$$y' = bz' + \beta.$$

Mais, de plus, si ce point se trouve aussi sur la surface qui a pour équation

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

il faudra que ses coordonnées satisfassent aussi à cette équation ; en sorte qu'on ait

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

ou en mettant pour x' et y' leurs valeurs $az'+\alpha$, $bz'+\beta$,

$$(Aa+Bb+C)z'+A\alpha+B\beta+D=0.$$

C'est l'équation de condition nécessaire pour que la droite ait un point de commun avec la surface dont il s'agit.

Soient de même x'', y'', z'' les coordonnées d'un autre point commun à la droite et à la surface, on en tirera encore la condition

$$(Aa+Bb+C)z''+A\alpha+B\beta+D=0.$$

Cette équation ne peut pas subsister en même tems que la précédente, à moins qu'on n'ait séparément

$$Aa+Bb+C=0 \qquad A\alpha+B\beta+D=0.$$

Ce sont les équations de condition nécessaires pour que la droite ait deux points communs avec la surface.

Mais si les valeurs des coefficiens a, b, α, β, sont telles que ces deux conditions soient satisfaites, tous les autres points de la droite lui seront aussi communs avec la surface ; car, soient x''', y''', z''' les coordonnées d'un quelconque de ces points, pour qu'il se trouve aussi sur la surface, il faut qu'on ait

$$(Aa+Bb+C)z'''+A\alpha+B\beta+D=0.$$

Or cette équation est satisfaite d'elle-même en vertu des deux précédentes, et par conséquent le point dont il s'agit est réellement commun à la surface et à la droite.

Ce résultat étant général, il s'ensuit que toute droite qui aura deux points communs avec la surface dont l'équation est

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

coïncidera avec elle dans toute son étendue, et par conséquent cette surface est plane.

58. En faisant $y=0$, on a

$$Ax+Cz+D=0$$

pour l'équation de la trace CD sur le plan des xz (fig. 24): si le plan proposé est perpendiculaire au plan des yz, cette trace devra être parallèle à l'axe des x; son équation sera par conséquent de la forme $z =$ constante, ce qui exige que A soit nul; l'équation du plan devient alors

$$By + Cz + D = 0,$$

et n'est plus qu'entre z et y; ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu dans le (n°. 41).

On trouverait de même que, si le plan proposé est perpendiculaire à celui des xz, on doit avoir $B=0$, parce que sa trace sur le plan des yz devient parallèle à l'axe des y. Ainsi

$$Ax + Cz + D = 0$$

est l'équation d'un plan perpendiculaire à celui des xz.

Enfin, pour que le plan soit perpendiculaire à celui des xy, il faut qu'on ait $C=0$; ce qui donne pour son équation

$$Ax + By + D = 0.$$

Il est aisé de voir que ces différentes formes résultent de ce que les quantités $-\frac{A}{C}, -\frac{B}{C}$, représentent les tangentes trigonométriques des angles que forment avec les axes des x et des y les traces du plan proposé sur ceux des xz et des yz.

Nous nous proposerons relativement au plan une suite de questions analogues à celles que la ligne droite nous a présentées.

59. Trouver les équations d'un plan qui passe par trois points donnés.

Soient $x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z'''$, les coordonnées de ces points, l'équation du plan cherché sera de cette forme

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

et, puisque les points donnés doivent y être compris, il devra exister entre les coefficiens A, B, C, D, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0 \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0 \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0. \end{aligned}$$

Ces trois équations, qui sont du premier degré par rapport aux coordonnées des points proposés, donneront pour A, B, C, des expressions de cette forme

$$A = A'D \qquad B = B'D \qquad C = C'D,$$

A', B', C', étant fonctions de ces coordonnées. En substituant ces valeurs dans l'équation du plan, D disparaîtra, et l'on aura

$$A'x + B'y + C'z + 1 = 0,$$

résultat qui satisfera aux conditions demandées.

60. Trouver l'intersection de deux plans.

Soient

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \end{aligned}\right\}$$ les équations de ces plans ;

elles devront avoir lieu en même tems pour les points qui sont communs aux deux plans. On pourra donc déterminer ces points en combinant les deux équations précédentes.

Si l'on élimine entre elles une des variables, z par exemple, le résultat

$$(AC' - A'C)\,x + (BC' - B'C)\,y + (DC' - D'C) = 0,$$

appartiendra à une ligne droite ; et, comme la relation qu'il exprime a lieu seulement entre les coordonnées x

et y des points situés sur l'intersection commune des deux plans, cette ligne sera la projection de cette intersection sur le plan des xy.

On prouvera de la même manière que, si l'on élimine y ou x entre les équations des deux plans, le résultat appartiendra à la projection de l'intersection sur le plan des xz ou des yz.

61. Généralement, pour trouver les points d'intersection de deux surfaces quelconques, il faudra dire que leurs équations, qui sont en x, y, z, ont lieu en même tems; et, en éliminant entre elles x ou y ou z, les équations que l'on obtiendra, et qui seront entre deux variables, seront celles de la projection de l'intersection des deux surfaces sur les plans des yz, des xz ou des xy.

Si l'on avait ainsi trois équations entre les trois variables x, y, z, et que ces équations dussent subsister en même tems, c'est-à-dire être satisfaites par les mêmes valeurs de ces variables, il faudrait encore employer l'élimination pour les obtenir. Ces valeurs seraient donc complettement déterminées; et comme elles arppartiendraient à-la-fois aux trois équations ou aux trois surfaces, elles représenteraient évidemment les coordonnées du point ou des points dans lesquels ces surfaces se coupent.

Tout ceci n'est que la généralisation de ce que nous avons remarqué plus haut, relativement à la combinaison des formules analytiques qui doivent avoir lieu simultanément. Le résultat de l'élimination donne tout ce qui peut être commun aux formules que l'on a combinées.

62. Trouver les conditions nécessaires pour que deux plans soient parallèles entre eux.

Soient

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

les équations de ces plans; s'ils sont parallèles, leurs intersections avec les plans coordonnés seront respectivement parallèles : en faisant successivement $x=0, y=0, z=0$, pour avoir les équations de ces traces, on trouve, pour les conditions demandées (n°. 31),

$$\frac{A}{C}=\frac{A'}{C'} \qquad \frac{B}{C}=\frac{B'}{C'} \qquad \frac{A}{B}=\frac{A'}{B'};$$

et l'on voit que deux quelconques d'entre elles comportent la troisième.

63. Trouver les conditions nécessaires pour qu'une droite soit parallèle à un plan.

Soient $\left.\begin{array}{l} x=az+\alpha \\ y=bz+\beta \end{array}\right\}$ les équations de la droite,

$Ax+By+Cz+D=0$ l'équation du plan.

Par l'origine des coordonnées, menons une droite et un plan respectivement parallèles, leurs équations seront

$$\begin{array}{ll} x=az & \qquad Ax+By+Cz=0. \\ y=bz & \end{array}$$

Pour que les conditions demandées soient remplies, il faut que cette droite, qui a un point de commun avec le plan, coïncide avec lui dans toute son étendue : l'équation du plan doit donc être satisfaite, quelle que soit z, par les valeurs de x et de y, tirées des équations de la droite; ce qui exige qu'on ait

$$Aa+Bb+C=0.$$

C'est la condition nécessaire pour qu'une droite soit parallèle à un plan.

64. Trouver les conditions nécessaires pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, et donner l'expression de

la distance du plan à un point quelconque de la perpendiculaire.

Soient $\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\}$ les équations de la droite ;
$Ax + By + Cz + D = 0$ celle du plan.

Pour que les conditions demandées soient remplies, il faut (n°. 53) que les projections de la droite soient perpendiculaires aux traces du plan : or, en faisant successivement $y = 0$, $x = 0$, dans l'équation qui le représente, on trouve

$$Ax + Cz + D = 0,$$

équation de la trace sur le plan des xz, et

$$By + Cz + D = 0,$$

équation de la trace sur le plan des yz.

Pour que ces droites soient perpendiculaires aux précédentes, il faut qu'on ait (n°. 32)

$$A = aC \qquad B = bC;$$

ce sont les conditions demandées.

Si la perpendiculaire passe par un point dont les coordonnées soient x', y', z', ses équations deviendront

$$x - x' = a(z - z')$$
$$y - y' = b(z - z').$$

Pour trouver le point où elle rencontre le plan, il faudra combiner ces équations avec celles du plan, que, pour plus de commodité, nous mettrons sous la forme suivante

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + D' = 0.$$

En faisant

$$D' = D + Ax' + By' + Cz',$$

alors l'élimination donne

$$z - z' = -\frac{D'}{Aa + Bb + C}$$

$$x - x' = -\frac{aD'}{Aa + Bb + C}$$

$$y - y' = -\frac{bD'}{Aa + Bb + C};$$

ou, en substituant pour a, b, leurs valeurs $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, qui résultent de ce que la droite est perpendiculaire,

$$z - z' = -\frac{CD'}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$x - x = -\frac{AD'}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$y - y' = -\frac{BD'}{A^2 + B^2 + C^2},$$

x, y, z, sont les coordonnées du point d'intersection. Sa distance à celui dont les coordonnées sont x', y', z', sera (n°. 40)

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

C'est la portion de la perpendiculaire cherchée : en la représentant par P, on aura

$$P = \frac{D'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

et, en remettant pour D' sa valeur

$$P = \frac{D + Ax' + By' + Cz'}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

65. Trouver l'angle de deux plans.

Soient

$$\left.\begin{array}{l} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{array}\right\}$$ les équations de ces plans.

Menons à chacun d'eux une droite perpendiculaire, l'angle de ces droites est le même que celui des deux plans. Les équations de ces droites étant

$$\begin{array}{ll} x=az+\alpha & x=a'z+\alpha' \\ y=bz+\beta & y=b'z+\beta', \end{array}$$

il faudra, pour qu'elles soient perpendiculaires aux plans, qu'on ait

$$\begin{array}{ll} A=aC & B=bC \\ A'=a'C' & B'=b'C'. \end{array}$$

L'angle des deux droites, ou, ce qui revient au même, celui des deux plans, étant désigné par V, son cosinus sera (n°. 45)

$$\cos V=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2}};$$

ou, en mettant pour a, a', b, b', leurs valeurs,

$$\cos V=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Cette expression est indépendante de D et de D', parce que ces quantités, qui expriment les ordonnées à l'origine, n'influent pas sur l'inclinaison des plans.

Si les deux plans sont perpendiculaires l'un à l'autre, on doit avoir $\cos V=0$; ce qui donne

$$AA'+BB'+CC'=0.$$

C'est la condition pour que deux plans soient perpendiculaires. Si l'un d'eux est le plan même des xy, dont

l'équation est $z=0$, on aura

$$A'=0 \qquad B'=0.$$

En nommant V' la valeur correspondante de V, il viendra

$$\cos V' = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

C'est le cosinus de l'angle qu'un plan fait avec celui des xy.

On trouvera, en nommant de même V'' et V''' les angles que le plan fait avec ceux des xz et des yz,

$$\cos V'' = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos V''' = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

et ces trois cosinus auront entre eux la relation

$$\cos^2 V' + \cos^2 V'' + \cos^2 V''' = 1,$$

parce que les angles V', V'', V''', sont les mêmes que ceux que formerait avec les trois axes des coordonnées une ligne droite perpendiculaire au plan.

66. L'expression précédente de $\cos V$ peut se transformer comme celle de l'article 49. En effet, si l'on nomme V', V'', V'''; U', U'', U''', les angles que forment les deux plans proposés avec ceux des xy, des xz et des yz, il est aisé de voir que l'on a

$$\cos V = \cos V' \cos U' + \cos V'' \cos U'' + \cos V''' \cos U'''.$$

67. Trouver l'angle d'une droite et d'un plan.

Soient $\left.\begin{array}{l} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{array}\right\}$ les équations de la droite.

$Ax + By + Cz + D = 0$ l'équation du plan.

L'angle que forme une droite avec un plan est le même que celui de cette droite avec sa projection sur ce plan;

par conséquent, si l'on mène une perpendiculaire au plan, l'angle qu'elle fera avec la droite proposée sera le complément de l'angle cherché.

Soient donc

$$\left.\begin{array}{l} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + \beta' \end{array}\right\} \text{ les équations de la perpendiculaire;}$$

on aura (n°. 64)

$$A = a'C \qquad B = b'C.$$

L'angle qu'elle fera avec la droite proposée aura pour cosinus

$$\frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\,\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}}.$$

En représentant l'angle cherché par V, ce sera la valeur de $\sin V$: mettant pour a' et b' leurs valeurs, on trouve

$$\sin V = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\,\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

C'est l'expression du sinus de l'angle que fait une droite avec un plan. Si l'on introduit les conditions nécessaires pour que celui-ci soit un des plans coordonnés, on retrouvera les mêmes valeurs que dans l'article 48 ; et, si l'on suppose $\sin V = 0$, on aura, comme dans l'article 63,

$$Aa + Bb + C = 0$$

pour la condition que le plan et la droite soient parallèles.

Ces préliminaires suffisent pour résoudre toutes les questions de géométrie relatives à la ligne droite et au plan.

De la Discussion des Lignes courbes, et de la Transformation des Coordonnées.

68. En généralisant les principes que nous venons d'exposer dans les chapitres précédens, on parvient à reconnaître, d'après l'équation d'une ligne courbe quelconque, la succession de ses points, et la trace qu'ils forment sur un plan ou dans l'espace.

Si l'équation de la courbe est entre deux variables y et x, on résout cette équation par rapport à une d'elles. On sait alors quelles valeurs cette coordonnée doit avoir, lorsque l'autre est prise à volonté; et l'on connaît ainsi la suite des points que l'équation désigne.

Mais, si la courbe est donnée par deux équations, chacune entre deux variables, c'est-à-dire si elle est donnée par ses projections sur deux des plans coordonnés, on opérera sur chacune de ces projections suivant la méthode précédente, et l'on connaîtra les valeurs de y et de z qui répondent à chaque valeur de x : ce qui fixera encore la position successive de tous les points.

Il pourrait arriver que la courbe proposée fût donnée par deux équations entre les trois coordonnées y, x, z; car deux équations de ce genre équivalent à deux équations en xy, xz ou yz : mais alors, en éliminant successivement une des variables entre les équations données, on retomberait dans le cas précédent.

La supposition que nous examinons ici est celle où la courbe proposée ne serait pas donnée par les intersections des deux surfaces cylindriques qui la projettent sur les deux plans coordonnés, mais par deux surfaces d'une autre nature, dont elle devrait aussi être l'intersection,

Les équations de ces deux surfaces devant avoir lieu simultanément, et pour les mêmes valeurs de x, y, z, il suffirait de les combiner, et d'en éliminer successivement x, ou y ou z, pour avoir les projections de la courbe sur les plans coordonnés.

69. On a vu par ce qui précède, que la forme et la position d'une ligne courbe sont toujours exprimées par les relations analytiques qui existent entre les coordonnées de ses différens points. C'est pourquoi on a classé les courbes en différens *ordres*, d'après la forme de leurs équations.

On les divise d'abord en *algébriques* et en *transcendantes*, suivant que leur équation, *rapportée à des coordonnées rectilignes*, est elle-même algébrique ou transcendante.

On classe ensuite les courbes algébriques d'après le degré de leur équation par rapport aux variables qui représentent les coordonnées. L'ordre de la courbe est marqué par l'exposant de ce degré.

Par exemple, la ligne droite dont nous nous sommes occupés est du premier ordre, parce que son équation est du premier degré relativement aux variables x et y.

Classer ainsi une ligne courbe et déterminer sa position, sa nature et sa forme d'après son équation, c'est ce qu'on appelle la *discuter*.

70. Cette recherche peut être presque toujours rendue plus facile par des transformations analytiques qui simplifient les équations, en faisant évanouir quelques-uns de leurs termes; préparation qui les met en état d'être discutées plus aisément.

Représentées par la géométrie, ces transformations reviennent à placer la courbe, par rapport aux axes des coordonnées, de la manière la plus favorable, pour deviner les sinuosités de son cours. Par exemple, si une

circonférence de cercle est placée d'une manière quelconque par rapport à ces axes, l'équation qui liera les abscisses et les ordonnées de ses différens points ne peut pas être si simple que si le centre de cette circonférence était placé à l'origine même des coordonnées; car, dans ce cas, la courbe serait symétrique par rapport à chacun des axes, et il suffirait de suivre son cours dans un des quarts de cercle, pour le connaître dans les trois autres. Or, on conçoit que cette simplification mettrait plus facilement à découvert la forme de la courbe, sa marche, ses propriétés.

Les méthodes dont il faut faire usage pour arriver à ces simplifications doivent donc se réduire à changer la position de l'origine et la direction des axes des coordonnées, pour les placer de manière qu'en y rapportant l'équation proposée, elle se réduise à la forme la plus simple que comporte l'espèce de la courbe qu'elle représente. Il suffit de reconnaître ensuite la position des nouveaux axes par rapport aux anciens, pour connaître quelle était originairement la position de la courbe par rapport à eux.

On peut de la même manière rapporter les courbes à des coordonnées qui ne soient pas rectangulaires : c'est ainsi, quoique pour un but différent, que nous avons transformé, dans l'article 24, l'équation de la ligne droite.

71. Quand on veut passer ainsi d'un système de coordonnées à un autre, on cherche, pour un point quelconque, les valeurs des anciennes coordonnées en fonction des nouvelles : en substituant ces valeurs dans l'équation proposée, elle appartient toujours aux mêmes points; mais ces points s'y trouvent rapportés aux nouveaux axes. Par conséquent, les propriétés de la courbe restent

toujours les mêmes, et il n'y a de changement que dans la manière dont elles sont exprimées.

72. Ces relations des nouvelles coordonnées avec les anciennes sont bien faciles à établir lorsqu'on ne veut que transporter l'origine des coordonnées, sans changer la direction des axes ; et l'on en a déja vu des exemples dans ce qui précède. En effet, soient A' (fig. 25) la nouvelle origine ; et $A'X'$, $A'Y'$, les nouveaux axes auxquels on veut rapporter les points du plan qui étaient précédemment rapportés aux axes parallèles AX, AY, et à l'origine A. Si l'on prend un point quelconque M situé dans l'angle $X'A'Y'$, on aura

$$AP = AB + BP \quad PM = PP' + P'M = A'B + P'M.$$

AB et $A'B$ doivent être donnés ; ce sont les coordonnées de la nouvelle origine, et elles expriment sa position par rapport aux anciens axes. Si donc on fait $AB = a$, $A'B = b$, qu'on représente par x, y, les anciennes coordonnées, et par x', y', les nouvelles prises dans le même sens, on aura

$$x = a + x' \qquad y = b + y'.$$

Pour que ces équations subsistent encore par rapport aux points situés dans l'angle $Y'A'x'$, il faut que l'on y suppose x' négatif ; car, pour un quelconque de ces points, tel que m, on aura

$$Ap = AB - A'p' \qquad \text{ou} \quad x = a - A'p' ;$$

et il faut alors retrancher la nouvelle abscisse de a, au lieu de l'ajouter à cette quantité. Il en sera de même des y', lorsqu'ils appartiendront à des points situés du côté de l'axe des X' opposé aux y' positifs : c'est ce que nous avons suffisamment développé dans l'article 19.

Nous avons supposé que la nouvelle origine A' était située dans l'angle YAX, et qu'ainsi ses coordonnées a et b, relatives aux anciens axes, étaient positives. Si nous voulons placer cette origine en A'' dans l'angle xAy, et prendre toujours les nouvelles coordonnées x' et y' dans le même sens, il suffira de changer les signes de a et de b dans les formules précédentes, et l'on aura

$$x = x' - b \qquad y = y' - b,$$

ainsi qu'on peut le trouver directement, en partant de leur position actuelle.

Ces considérations sont conformes aux principes établis dans les préliminaires; elles se réduisent à cette règle générale, que lorsqu'on passe d'un système de coordonnées à un autre parallèle, au moyen des équations

$$x = a + x' \qquad y = b + y',$$

il faut regarder la variation de signe de chaque espèce de coordonnées comme répondant aux changemens de position autour de l'origine qui lui est relative; et les quantités a et b, qui sont les coordonnées d'une des origines par rapport à l'autre, peuvent être rapportées à celui des deux systèmes qu'on voudra.

C'est en considérant la position de la nouvelle origine par rapport à l'ancienne, que nous avons obtenu les équations précédentes. Réciproquement, ces équations étant données, on pourrait en déduire la position d'un quelconque des deux systèmes par rapport à l'autre; car, en y faisant, par exemple $x'=0$, ce qui est le caractère de l'axe des y', on aurait

$$x = + a;$$

ce qui, en supposant a et b positifs, signifie que l'axe des y', auquel cette équation appartient, est situé du côté des x

positifs, et à une distance a de leur origine. De même, en faisant $y' = o$, ce qui est le caractère de l'axe des x', on aurait, relativement à cet axe,

$$y = b;$$

c'est-à-dire qu'il est situé du côté des y positifs, à une distance b de leur origine. En faisant, au contraire, $x = o$, ou $y = o$, on trouverait $x' = -a$, ou, $y' = -b$, qui seraient les équations des axes des y et des x par rapport à l'origine des y' et des x'.

Ce que nous venons de dire a lieu, quel que soit l'angle formé par les axes des coordonnées; et nous en conclurons que, pour passer d'un système quelconque de coordonnées à un autre parallèle au précédent, il suffit de faire

$$x = a + x' \qquad y = b + y',$$

b et a étant les coordonnées d'une des origines par rapport à l'autre. En substituant ces valeurs dans une équation quelconque entre x et y, elle se trouvera rapportée aux variables y' et x'.

73. Passons maintenant au cas où l'on fait varier la direction des axes et l'angle qu'ils forment entre eux; mais, pour plus de simplicité, supposons d'abord que l'origine ne varie pas, et qu'elle soit commune aux deux systèmes de coordonnées.

Soient donc AY, AX, deux axes des y et des x (fig. 26), que nous prendrons rectangulaires.

Soient AY', AX', deux autres axes qui font entre eux un angle quelconque, on demande de passer du premier système de coordonnées au second.

D'un point quelconque M menons les droites MP, MQ parallèles aux axes des y et des y', on aura

$$AP = x \quad PM = y \quad AQ = x' \quad QM = y'.$$

Il faut, de plus, que la position des nouveaux axes soit donnée par rapport aux anciens.

Soient donc l'angle $X'AX = \alpha$, l'angle $Y'AX = \alpha'$.

Il s'agit de déterminer x et y en fonction de x' et de y', et des quantités connues α et α'.

74. A proprement parler, cette détermination est un véritable problème de trigonométrie ; et l'on y parviendrait en calculant séparément, par des triangles, les lignes qui composent les nouvelles coordonnées. Mais, à l'aide d'un artifice ingénieux d'analyse, le calcul peut se faire d'une manière beaucoup plus élégante, plus facile, et qui n'exige aucune construction.

Cet artifice consiste à prévoir d'avance la forme des relations qui doivent exister entre les anciennes et les nouvelles coordonnées : car, on peut prouver en général que, lorsqu'on passe d'un système quelconque de coordonnées à un autre, les anciennes coordonnées doivent toujours être une fonction linéaire des nouvelles, et réciproquement.

En effet, représentons en général les valeurs de x et de y par

$$x = \varphi(x', y') \qquad y = \psi(x', y'),$$

les signes φ et ψ désignant des quantités composées d'une manière quelconque en x' et y', c'est-à-dire, fonctions quelconques des nouvelles coordonnées.

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation de la ligne droite, qui est toujours de la forme

$$y = ax + b.$$

elle devient

$$\psi(x', y') = a.\varphi(x', y') + b.$$

Or, nous avons vu (n°. 25) que l'équation de la ligne droite reste toujours du premier degré, quelle que soit la direction des axes auxquels on la rapporte : il faudra donc que l'équation précédente se réduise à la forme

$$y' = a'x' + b';$$

et, comme cela doit avoir lieu pour toutes les valeurs possibles de a et de b, c'est-à-dire pour toutes les positions possibles de la ligne droite, il faut absolument que les fonctions φ et ψ soient elles-mêmes du premier degré en x' et y'.

75. On voit donc que les valeurs les plus générales que puissent avoir x et y sont nécessairement de la forme

$$x = ax' + a'y' + c \quad y = bx' + b'y' + c',$$

a, a', b, b', c, c' étant des constantes indéterminées. On peut aisément vérifier qu'en effet cette forme satisfait aux conditions de l'article précédent. Les constantes a, a', b, b', c, c' resteront les mêmes, quelles que soient les variables x, y, x', y' : il suffira donc, pour les déterminer, de connaître leurs valeurs pour des cas particuliers.

Si l'on fait $x' = 0$, $y' = 0$, ce qui est le caractère de la nouvelle origine, on aura pour ses coordonnées

$$x = c \quad y = c';$$

et, puisque l'on suppose qu'elle est la même pour les deux systêmes, il faut que c et c' soient nuls : alors les équations precédentes deviennent

$$x = ax' + a'y' \quad y = bx' + b'y'.$$

Si l'on fait $y' = 0$, x' étant quelconque, ce qui est le caractère de l'axe des x', on aura pour les points qui y sont

$$x = ax' \qquad y = bx'.$$

Mais, si, d'un de ces points, tel que m (fig. 26) on mène l'ordonnée mp à l'axe AX, alors, pour ce point, Ap sera x; pm, y; Am, x', et le triangle rectangle Amp donnera

$$x = x' \cos \alpha \qquad y = x' \sin \alpha.$$

Ces équations devant s'accorder avec les précédentes, on aura

$$a = \cos \alpha \qquad b = \sin \alpha.$$

Faisons maintenant $x' = 0$, ce qui est le caractère de l'axe des y', on aura pour les points qui y sont,

$$x = a'y' \qquad y = b'y'.$$

Mais, si, d'un quelconque m' de ces points, on abaisse l'ordonnée $m'p'$ à l'axe AX, Ap' sera x; $p'm'$, y; Am', y', et l'on aura, comme précédemment,

$$x = y' \cos \alpha' \qquad y = y' \sin \alpha';$$

ce qui donne

$$a' = \cos \alpha' \qquad b' = \sin \alpha'.$$

Les valeurs des constantes se trouvant ainsi connues, on les substituera dans les expressions des x et y, et il viendra

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha' \qquad y = x' \sin \alpha + y' \sin \alpha'.$$

Telles sont les relations qu'ont entre elles les coordonnées dans les deux systèmes que nous considérons.

76. Si l'on voulait passer des coordonnées x' et y' aux coordonnées x et y, il suffirait de déduire les valeurs de x' et de y' des équations précédentes. En multipliant la première par $\sin \alpha'$, et en retranchant la seconde multipliée par $\cos \alpha'$, on aura x'; opérant d'une manière analogue par rapport à α, on aura y': ces valeurs seront

$$x' = \frac{x \sin \alpha' - y \cos \alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)} \quad y' = \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

On aurait pu parvenir directement à ces résultats en partant des expressions les plus générales de x', y' en x, y, et déterminant les constantes qu'elles doivent renfermer par la considération des valeurs de x', y', pour les axes des x et des y (fig. 27). En effet, l'origine étant la même pour les deux systèmes, on aura

$$x' = mx + m'y \quad y' = nx + n'y.$$

Si on fait $y = 0$, ce qui est le caractère de l'axe des x, on aura, pour les points qui y sont situés,

$$x' = mx \quad y' = nx.$$

Mais, pour un de ces points, tel que m, si l'on mène mp parallèle à l'axe AY', Am sera x; Ap, x'; et pm, y, qui devra être pris négativement, puisque le point m est situé du côté des y' négatifs. Or, l'angle $X'AX$ étant α, et l'angle $Y'AX$, α', l'angle Apm est $\alpha' - \alpha$; et le triangle Amp donne

$$x' = \frac{x \sin \alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)} \quad y' = -\frac{x \sin \alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)};$$

d'où l'on tire

$$m = \frac{\sin \alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)} \quad n = -\frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

Faisant $x = 0$, ce qui est le caractère de l'axe des y, on aura, pour les points qui y sont situés,

$$x' = m'y \quad y' = n'y.$$

Mais, pour un de ces points, tel que m', si l'on mène la ligne $m'p'$ parallèle à l'axe AX', Am' sera y; Ap', y'; et

$m'p'$, x'; qui devra être pris négativement, parce que le point m' est situé du côté des x' négatifs : le triangle $Am'p'$ donnera

$$x' = -\frac{y\cos\alpha'}{\sin(\alpha'-\alpha)} \qquad y' = \frac{y\cos\alpha}{\sin(\alpha'-\alpha)};$$

d'où l'on tire

$$m' = -\frac{\cos\alpha'}{\sin(\alpha'-\alpha)} \qquad n' = \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha'-\alpha)}.$$

Les quatre constantes m, m', n, n', sont donc aussi déterminées, et donneront les mêmes valeurs que nous avons trouvées précédemment. Les formules

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' \quad y = x'\sin\alpha + y'\sin\alpha',$$

et celles-ci, qui s'en déduisent,

$$x' = \frac{x\sin\alpha' - y\cos\alpha'}{\sin(\alpha'-\alpha)} \quad y' = \frac{y\cos\alpha - x\sin\alpha}{\sin(\alpha'-\alpha)},$$

suffisent pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires x et y à un système de coordonnées obliques x' et y', et réciproquement, l'origine restant la même pour les deux systêmes.

77. Si les nouveaux axes des x' et des y' devaient être aussi rectangulaires comme les précédens, on aurait

$$\alpha' - \alpha = 100^\circ;$$

d'où

$$\sin(\alpha'-\alpha) = 1 \quad \sin\alpha' = \cos\alpha \quad \cos\alpha' = -\sin\alpha.$$

En substituant ces valeurs, les relations des coordonnées deviendraient

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Ce sont les formules nécessaires pour passer d'un système

de coordonnées rectangulaires à un autre aussi rectangulaire, l'origine restant la même, comme il serait facile de le vérifier *à posteriori*, en appliquant à ce cas les considérations géométriques dont nous avons fait précédemment usage.

78. Si l'on ajoute ces équations après avoir élevé chacun de leurs membres au carré, on trouvera

$$x^2+y^2=x'^2+y'^2.$$

Et, en effet, les nouveaux axes étant rectangulaires comme les anciens, $\sqrt{x'^2+y'^2}$ exprime la distance d'un point quelconque à l'origine des coordonnées; et, $\sqrt{x^2+y^2}$ exprimant aussi la même distance à la même origine, ces deux valeurs doivent être égales.

79. On peut, au moyen de ce qui précède, passer d'un système de coordonnées obliques à un autre système de coordonnées obliques (fig. 28). En effet, soient AX', AY', les axes des x' et des y'; AX'', AY'', les nouveaux axes, dont les coordonnées seront x'', y''. Concevons, par la même origine, un troisième système d'axes AX, AY, rectangulaires entre eux, et dont les coordonnées seront x et y. Nommons α, α', β, β', les angles des x', des y', des x'' et des y'' avec l'axe AX, nous aurons pour un même point, dont les coordonnées seront x et y par rapport au système rectangulaire,

$$x=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha' \qquad y=x'\sin\alpha+y'\sin\alpha'$$
$$x=x''\cos\beta+y''\cos\beta' \qquad y=x''\sin\beta+y''\sin\beta'.$$

En éliminant x et y entre ces équations, on aura celles qui déterminent les relations des coordonnées x' et y' avec les x'' et y'', et qui sont

$$x'\cos\alpha+y'\cos\alpha'=x''\cos\beta+y''\cos\beta'$$
$$x'\sin\alpha+y'\sin\alpha'=x''\sin\beta+y''\sin\beta'.$$

Si l'on multiplie la première par sin α, et qu'on la retranche de la seconde multipliée par cos α on aura y'; et, en opérant d'une manière analogue pour α', on aura x' : on trouvera ainsi

$$x' = \frac{x'' \sin(\alpha' - \beta) + y'' \sin(\alpha' - \beta')}{\sin(\alpha' - \alpha)}$$

$$y' = \frac{x'' \sin(\beta - \alpha) + y'' \sin(\beta' - \alpha)}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

Or, on a

$$\alpha' - \beta = Y'AX'' \quad \alpha' - \beta' = Y'AY''$$

$$\beta - \alpha = X'AX'' \quad \beta' - \alpha = X'AY'' \quad \alpha' - \alpha = Y'AX'.$$

Il n'entre donc, dans les expressions précédentes, que les angles formés par les axes des Y' et des X' entre eux, et avec les nouveaux axes AX'', AY''; et tout ce qui était relatif au système rectangulaire que nous avons introduit a disparu. Si donc on nomme θ l'angle $Y'AX'$ formé par les axes des y' et des x' et ε', γ', ε, γ, les angles $Y'AY''$, $X'AY''$, $Y'AX''$, $X'AX''$, que forment les nouveaux axes des y'' et des x'' avec chacun d'eux, les équations précédentes deviendront

$$x' = \frac{x'' \sin\varepsilon + y'' \sin\varepsilon'}{\sin\theta} \qquad y' = \frac{x'' \sin\gamma + y'' \sin\gamma'}{\sin\theta}.$$

Ces formules serviront à passer d'un système de coordonnées obliques à un autre système de coordonnées obliques, l'origine étant la même pour tous deux. Si on supposait les axes des x' et des y' perpendiculaires entre eux, on aurait

$$\theta = 100^\circ \qquad \varepsilon + \gamma = 100^\circ \qquad \varepsilon' + \gamma' = 100^\circ :$$

par conséquent

$$\sin\theta = 1 \qquad \sin\varepsilon = \cos\gamma \qquad \sin\varepsilon' = \cos\gamma' ;$$

et l'on retomberait sur les équations que nous avons déja trouvées, pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires à un système de coordonnées obliques.

80. Nous avons vu précédemment que, pour passer d'un système de coordonnées x et y à un autre système de coordonnées x', y' parallèles aux premières, il faut faire

$$x = a + x' \qquad y = b + y',$$

a et b étant les coordonnées de la nouvelle origine par rapport au premier système. Si l'on fait ensuite varier la direction des axes autour de cette nouvelle origine, on aura changé à-la-fois et la position de l'origine des coordonnées et la direction des axes. Il suffit donc d'ajouter, dans les formules précédentes, aux valeurs des coordonnées celles de la nouvelle origine, pour avoir les formules générales de la transformation des coordonnées. Comme elles sont d'un fréquent usage, je les ai réunies dans le tableau suivant :

1°. Pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires x, y, à un système de coordonnées obliques x', y' :

$$x = a + x' \cos\alpha + y' \cos\alpha' \qquad y = b + x' \sin\alpha + y' \sin\alpha'.$$

2°. Pour passer d'un système de coordonnées obliques x', y', à un système de coordonnées rectangulaires x, y :

$$x' = \frac{(x - a)\sin\alpha' - (y - b)\cos\alpha'}{\sin(\alpha' - \alpha)}$$

$$y' = \frac{(y - b)\cos\alpha - (x - a)\sin\alpha}{\sin(\alpha' - \alpha)}.$$

3°. Pour passer d'un système de coordonnées rectangulaires x, y, à un système de coordonnées aussi rectangulaires x', y' :

$$x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \quad y = b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Dans ces équations α, α', sont les angles des axes des x' et des y' avec l'axe des x; a et b sont les coordonnées de la nouvelle origine par rapport au système rectangulaire.

4°. Pour passer d'un système de coordonnées obliques x, y, à un autre système de coordonnées obliques x', y' :

$$x = a + \frac{x'\sin\epsilon + y'\sin\epsilon'}{\sin\theta} \quad y = b + \frac{x'\sin\gamma + y'\sin\gamma'}{\sin\theta}.$$

γ, γ', sont les angles que les axes des x' et des y' font avec l'axe des x; ϵ, ϵ', les angles qu'ils font avec l'axe des y; a et a' les coordonnées de la nouvelle origine par rapport aux axes obliques des x et des y, qui forment entre eux un angle θ.

81. En généralisant les considérations que nous venons d'exposer, on trouvera facilement les formules nécessaires pour effectuer la transformation des coordonnées en trois dimensions ou dans l'espace; car il suffit encore, dans ce cas, de trouver les expressions des anciennes coordonnées en fonction des nouvelles, ou réciproquement; et l'on peut y parvenir par les mêmes méthodes. Ces relations n'ont aucune difficulté lorsqu'on se propose seulement de transporter l'origine, en laissant les axes parallèles à eux-mêmes. Alors, en nommant a, b, c les coordonnées de la nouvelle origine par rapport à l'ancienne, et désignant par x' y' z', les nouvelles coordonnées qui étaient précédemment représentées par x, y, z, on aura

$$x = a + x' \quad y = b + y' \quad z = c + z',$$

formules dans lesquelles il faut regarder les variations de signe de chaque espèce de coordonnées comme répondant

aux changemens de position autour de l'origine qui lui est relative. Ces considérations sont conformes à celles de l'art. 72, et l'on en déduira de même les positions respectives des deux origines.

82. On a vu, dans l'art. 54, que l'équation du plan est toujours du premier degré en x, y, z, quel que soit l'angle des coordonnées. De là, il est facile de conclure, par un raisonnement analogue à celui du n°. 74, que, lorsqu'on passe d'un système de coordonnées à un autre, les anciennes coordonnées sont toujours exprimées, en fonction des nouvelles, d'une manière linéaire, quels que soient les angles des axes. Ainsi en désignant les unes par x, y, z, et les autres par x', y', z' on aura généralement

$$x = a + mx' + m'y' + m'' z'$$
$$y = b + nx' + n'y' + n'' z'$$
$$z = c + px' + p'y' + p'' z',$$

les coefficiens des variables x', y', z' étant des constantes inconnues, et qu'il s'agit de déterminer.

Si l'on fait $x' = 0, y' = 0, z' = 0$, ce qui est le caractère de la nouvelle origine, il vient

$$x = a \qquad y = b \qquad z = c.$$

a, b, c, sont donc les coordonnées de cette origine par rapport à l'ancienne : nous les supposerons nulles, pour plus de simplicité, ce qui revient à changer la direction des axes sans déplacer l'origine ; il suffira ensuite de les ajouter aux résultats, pour transporter le nouveau système d'axes parallèlement à lui-même. Par cette supposition, les formules précédentes deviennent

$$x = mx' + m'y' + m'' z'$$
$$y = nx' + n'y' + n'' z'$$
$$z = px' + p'y' + p'' z'.$$

Les constantes qu'elles renferment se déterminent facilement par des suppositions particulières. Considérons, par exemple, les points situés sur l'axe des x', les équations de cet axe seront

$$y' = 0 \qquad z' = 0.$$

On aura donc, pour les points qui y sont situés,

$$x = mx' \qquad y = nx' \qquad z = px'.$$

Soient AX' cet axe, M un quelconque de ses points (fig. 29); et supposons, pour plus de simplicité, que les anciens axes AX, AY, AZ, soient rectangulaires, alors AM sera x', MM' sera z, et le triangle AMM' donnera

$$z = x' \cos AMM'.$$

L'angle AMM' est celui que forme le nouvel axe des x avec l'ancien axe des z; nous le désignerons par Z. Si nous nommons pareillement X, Y, les angles formés par ce même axe AX' avec les axes AX, AY, nous aurons, pour les points qui y sont situés,

$$x = x' \cos X \quad y = x' \cos Y \quad z = x' \cos Z.$$

Ce résultat détermine n, m, p, et donne

$$m = \cos X \quad n = \cos Y \quad p = \cos Z.$$

Si nous considérons de même les points situés sur l'axe des y', dont les équations sont

$$x' = 0 \qquad z' = 0,$$

on aura, relativement à ces points,

$$x = m'y' \quad y = n'y' \quad z = p'y'.$$

Ainsi, en désignant par X', Y', Z', les angles que forme

cet axe avec ceux des x, y, z, on aura

$$m' = \cos X' \quad n' = \cos Y' \quad p' = \cos Z'.$$

Enfin la considération des points situés sur l'axe des z' déterminera les constantes m'', n'', p'', et en nommant X'', Y'', Z'', les angles que forme cet axe avec ceux des x, y, z, on aura

$$m'' = \cos X'' \quad n'' = \cos Y'' \quad p'' = \cos Z'';$$

d'où l'on tire pour x, y, z,

$$\begin{aligned} x &= x' \cos X + y' \cos X' + z' \cos X'' \\ y &= x' \cos Y + y' \cos Y' + z' \cos Y'' \\ z &= x' \cos Z + y' \cos Z' + z' \cos Z''. \end{aligned} \qquad (1)$$

Il faudra joindre à ces valeurs les équations de condition qui ont lieu entre les trois angles que fait une ligne droite avec les trois axes, et qui sont (n°. 46)

$$\begin{aligned} \cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z &= 1 \\ \cos^2 X' + \cos^2 Y' + \cos^2 Z' &= 1 \\ \cos^2 X'' + \cos^2 Y'' + \cos^2 Z'' &= 1. \end{aligned} \qquad (2)$$

Ces formules suffisent pour transformer les coordonnées, lorsque les angles des nouveaux axes entre eux doivent être quelconques; mais si ces angles sont donnés, il en résultera de nouvelles conditions entre les angles X, Y, Z; X'... et il faudra les joindre aux équations précédentes.

En effet, si l'on nomme V l'angle que forment les x' avec les y'; U l'angle des y' avec les z', et W l'angle des z' avec les x', on aura, par le n°. 49,

$$\begin{aligned} \cos V &= \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' \\ \cos U &= \cos X' \cos X'' + \cos Y' \cos Y'' + \cos Z' \cos Z'' \\ \cos W &= \cos X \cos X'' + \cos Y \cos Y'' + \cos Z \cos Z''; \end{aligned} \qquad (3)$$

et ces équations, étant jointes aux formules (1) et (2),

suffiront dans tous les cas pour établir les conditions relatives aux nouveaux axes, en supposant les anciens rectangulaires.

83. Si, par exemple, on veut que ceux-ci soient rectangulaires, on aura

$$\cos V = 0 \qquad \cos U = 0 \qquad \cos W = 0 ;$$

et les seconds membres des équations (3) seront nuls : alors, en ajoutant les carrés de x, y, z, on trouve

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Et cette condition doit être en effet remplie, lorsque les deux systèmes de coordonnées sont rectangulaires, et ont la même origine, parce qu'alors la somme des carrés des trois coordonnées représente dans l'un et dans l'autre la distance du point à cette origine commune.

84. On peut aussi changer la direction de deux axes seulement, en conservant le troisième. Supposons, par exemple, que celui-ci soit l'axe des z, et que les deux autres coordonnées, faisant entre elles un angle V, doivent toujours lui être perpendiculaires; on aura, d'après ces conditions;

$$\cos U = 0 \qquad \cos W = 0$$
$$\cos X'' = 0 \qquad \cos Y'' = 0 \qquad \cos Z'' = 1 ;$$

valeurs qui, substituées dans les équations (3) donnent

$$\cos Z' = 0 \qquad \cos Z = 0 ;$$

c'est-à-dire que les axes des x' et des y' sont dans le plan des xy, de là et des équations (2) il résulte

$$\cos Y = \sin X \qquad \cos Y' = \sin X' ;$$

et les valeurs de x, y, deviennent

$$x = x' \cos X + y' \cos X', \quad y = x' \sin X + y' \sin X',$$

qui sont précisément celles que l'on a trouvées dans l'article 75, pour passer d'un système d'axes rectangulaires x et y à un système quelconque situé dans le même plan.

85. Les questions que nous venons de traiter dans ces préliminaires sont en quelque sorte les élémens de tous les problêmes qui concernent l'application de l'algèbre à la géométrie. Les formules que l'on en déduit sont autant de méthodes générales dont l'usage revient sans cesse, et que l'on ne suppléerait qu'imparfaitement par des constructions particulières qu'il faudrait recommencer pour tous les cas. Mais pour sentir le prix de ces méthodes, il est nécessaire de se familiariser avec elles par l'usage : c'est pourquoi nous les appliquerons à la recherche des propriétés des courbes et des surfaces du second ordre ; et cet exemple, qui fait l'objet du reste de cet ouvrage, suffira pour montrer généralement comment on doit employer ces procédés.

DES SECTIONS DU CÔNE.

86. Les courbes du second ordre sont aussi appelées *sections coniques*, parce qu'on peut les obtenir en coupant un cône à base circulaire par des plans diversement inclinés. Comme cette propriété les rapporte plus particulièrement à leur origine, nous la démontrerons d'abord.

Pour cela, nous considérerons un cône droit, dans lequel les coordonnées du centre, la position de l'axe et l'angle au centre, soient indéterminés par rapport aux trois plans rectangulaires des coordonnées; et nous ferons voir qu'en le présentant à un plan coupant dans des positions différentes, on obtient pour l'intersection toutes les courbes du second degré possibles : nous prendrons pour plan coupant le plan même des xy (*).

Soient x', y', z', les coordonnées du centre du cône : son axe étant une ligne droite qui passe par ce point, aura pour équation

$$x - x' = a\,(z - z')$$
$$y - y' = b\,(z - z'),$$

(*) On a vu dans les Elémens de Géométrie qu'un cône droit est engendré par le mouvement d'une ligne droite assujettie à passer toujours par un même point qui est le centre du cône, et à faire toujours le même angle avec une droite fixe passant par ce point, et que l'on nomme axe. Le double de cet angle est ce que j'appelle l'angle au centre du cône, parce que c'est celui que forment les deux génératrices opposées, suivant lesquelles un plan mené par l'axe couperait la surface conique.

a et b étant des quantités constantes qui dépendent de la position de l'axe. La droite génératrice doit aussi passer par le centre dans toutes ses positions : par conséquent son équation sera de la forme

$$x - x' = a' (z - z')$$
$$y - y' = b' (z - z'),$$

a' et b' étant constantes pour la même génératrice et variables d'une génératrice à une autre.

La génératrice devant faire toujours le même angle avec l'axe, si l'on désigne le cosinus de cet angle par M, on aura (n°. 45)

$$\frac{1 + aa' + bb'}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\sqrt{1 + a'^2 + b'^2}} = M.$$

Cette équation subsiste pour chaque position de la droite génératrice : si l'on en chasse a' et b', en mettant, au lieu de ces quantités, leurs valeurs $\frac{x - x'}{z - z'}$, $\frac{y - y'}{z - z'}$, tirées des équations précédentes, le résultat en x, y, z, ne sera plus particulier à aucune des positions de la droite génératrice, mais il appartiendra à tous les points qui peuvent se trouver sur cette droite lorsqu'elle fait avec l'axe l'angle donné. Ce sera donc l'équation de la surface conique engendrée par son mouvement.

Cette substitution donne

$$\frac{1 + a\dfrac{x - x'}{z - z'} + b\dfrac{y - y'}{z - z'}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}\sqrt{1 + \left\{\dfrac{x - x'}{z - z'}\right\}^2 + \left\{\dfrac{y - y'}{z - z'}\right\}^2}} = M;$$

ou, en chassant les dénominateurs, et élevant les deux membres au carré,

$$\{(z-z')+a(x-x')+b(y-y')\}^2=M^2(1+a^2+b^2)\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\},$$

équation qui convient à tous les points de la surface conique.

87. Pour ceux de ces points qui sont situés dans le plan des xy, on a de plus $x=0$; ce qui donne

$$\{-z'+a(x-x')+b(y-y')\}^2=M^2(1+a^2+b^2)\{(x-x')^2+(y-y')^2+z'^2\}\ (1).$$

C'est l'équation de l'intersection du cône par le plan des xy, elle comprend toutes les sections coniques, puisque l'angle au centre du cône et sa position dans l'espace sont absolument indéterminés; et, comme elle est en général du second degré par rapport aux variables x et y, on voit que les sections coniques sont des courbes du second degré.

88. Réciproquement, toute équation du second degré appartient à une section conique; car, en représentant cette équation par la formule

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 \quad (2),$$

qui est la plus générale de ce degré, elle ne contiendra d'indéterminées que les cinq quantités $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, $\frac{E}{A}$, $\frac{F}{A}$, qui expriment les rapports d'un de ses coefficiens à tous les autres. On conçoit donc qu'il doit être possible de disposer des six arbitraires x', y', z'; a, b, M, que renferme l'équation des sections du cône, de manière à la rendre identique avec l'équation (2); et en effet on obtient ainsi, pour ces arbitraires, des valeurs toujours réelles, excepté dans un seul cas, qui est celui où l'équation (2) est impossible. Nous reviendrons plus tard sur cette proposition lorsque nous aurons examiné avec détail les diverses formes que l'équation de l'intersection et les courbes qu'elle représente peuvent prendre suivant les diverses

situations dans lesquelles on place le cône par rapport au plan coupant.

89. Pour le moment, bornons-nous à reconnoître la forme générale de ces courbes, et les caractères principaux qui peuvent servir à les distinguer les unes des autres. Pour les découvrir avec plus de facilité, nous placerons le cône dans des situations propres à donner des intersections symétriques par rapport aux axes des x et des y, auxquels elles se trouvent rapportées. Cette disposition, dont nous sommes absolument les maîtres, ne diminuera nullement la généralité des résultats.

Mettons d'abord le centre de la surface conique dans l'axe même des coordonnées z; il faudra, pour cela, faire

$$x' = 0 \quad y' = 0.$$

Plaçons, de plus, l'axe dans le plan même des xz; il faudra, pour cela, faire $b = 0$ (n°. 41); car les équations de cet axe étant

$$x - x' = a\,(z - z')$$
$$y - y' = b\,(z - z_{,})$$

elles deviendront, par ces suppositions,

$$x = a\,(z - z')$$
$$y = 0;$$

et la seconde, appartenant au plan des xz, indiquera que l'axe y est situé. Avec ces simplifications, l'équation générale de l'intersection sera

$$(ax - z')^2 - M^2\,(1 + a^2)\,(x^2 + y^2 + z'^2) = 0.$$

Le cône est alors dans la situation représentée (fig. 30); l'axe DCD' est dans le plan même des x et z, et a exprime la tangente de l'angle DCO qu'il fait avec l'axe des z, OX est le côté des x positifs.

Digitized by Google

Cette équation étant développée et réduite, donne

$$M^2(1+a^2)y^2+\{M^2(1+a^2)-a^2\}x^2+2az'x=z'^2\{1-M^2(1+a^2)\};$$

et enfin, en divisant par $M^2(1+a^2)$, on a

$$y^2+\left\{1-\frac{a^2}{M^2(1+a^2)}\right\}x^2+\frac{2az'}{M^2(1+a^2)}x=z'^2\left\{\frac{1}{M^2(1+a^2)}-1\right\}(1).$$

90. Nommons α l'angle que l'axe du cône fait avec l'axe des z, et β l'angle que la génératrice fait avec l'axe du cône : le premier, ayant pour tangente a, aura pour cosinus $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, et pour sinus $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$. Par conséquent, $\frac{a^2}{M^2(1+a^2)}$ est le carré du rapport du sinus de α au cosinus de β, et $\frac{1}{M^2(1+a^2)}$ est le carré du rapport du cosinus de α au cosinus de β : désignant le premier rapport par φ, le second par ψ, on aura

$$\varphi=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\qquad\psi=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta};$$

et l'équation de l'intersection deviendra

$$y^2+(1-\varphi^2)\,x^2+2\,\psi^2\,az'x=z'^2\,(\psi^2-1)\quad(2).$$

Le cône étant ainsi placé, on peut très-aisément reconnaître les diverses formes que peut prendre son intersection, et trouver des caractères fixes qui les distinguent parfaitement les unes des autres.

91. D'abord, si l'on a $\alpha+\beta<100''$, le plan des xy coupe toutes les droites génératrices sur une même nappe de la surface conique ; l'intersection est une courbe fermée et rentrante sur elle-même (fig. 30).

Si $\alpha+\beta=100°$, le plan des xy ne rencontre encore

qu'une des nappes de la surface conique; mais une des génératrices lui devient parallèle. La courbe d'intersection n'est plus fermée et rentrante sur elle-même; elle s'alonge indéfiniment, et s'étend sur une des nappes de la surface conique (fig. 31).

Enfin, si l'on a $\alpha + \beta > 100°$, le plan des *xy* rencontre les deux nappes de la surface conique; l'intersection s'étend indéfiniment sur les deux nappes de cette surface (fig. 32).

Mais il faut encore ajouter comme condition essentielle à tous ces caractères, que $\alpha - \beta$ ou l'angle *OCA* soit compris entre 0 et 100°, afin que l'arête *CA* puisse rencontrer le plan horisontal *MN*.

92. On peut donc ranger toutes les sections coniques en trois grandes classes, correspondantes aux trois formes générales que nous venons de reconnaître. Les courbes comprises dans la première classe se nomment des *ellipses*; celles de la seconde, des *paraboles*; celles de la troisième, des *hyperboles*.

Introduisons maintenant dans l'équation générale les caractères propres à ces trois genres de courbes, et voyons les modifications qu'elle éprouve par ces substitutions.

93. Pour cela, faisons en général

$$\alpha + \beta = 100° - n,$$

n étant une quantité quelconque, qu'il suffira de faire positive, nulle ou négative, pour avoir les trois suppositions précédentes, on aura ainsi

$$\sin\alpha = \sin(100° - n - \beta) = \cos(n + \beta)$$
$$\cos\alpha = \cos(100° - n - \beta) = \sin(n + \beta);$$

ce qui donne

$$\varphi = \frac{\cos(n+\beta)}{\cos\beta} \quad \psi = -\frac{\sin(n+\beta)}{\cos\beta}.$$

Selon que l'on fera la quantité *n* positive, nulle ou néga-

tive, $\alpha - \beta$ étant toujours compris entre o et 100°, on aura $\varphi < 1$, $\varphi = 1$, $\varphi > 1$; et le coefficient de x^2, dans l'équation (2) deviendra positif, nul ou négatif. Réciproquement, selon qu'on donnera à ce coefficient l'une de ces trois valeurs, on aura $\varphi < 1$, $\varphi = 1$, $\varphi > 1$, et par suite, la quantité n, positive, nulle ou négative. On peut donc, à ce caractère, substituer celui qui se tirerait du signe du coefficient de x^2; et de là résulte cette conséquence :

L'équation (2) qui représente toutes les sections coniques, donnera l'ellipse, la parabole ou l'hyperbole, selon que le coefficient de x^2 *sera positif, nul ou négatif. La nature de la courbe ne dépend que du signe de ce coefficient.*

94. Si l'on suppose $\alpha = 0$, l'axe du cône se confondra avec l'axe des z, et l'intersection sera une circonférence de cercle. Dans ce cas, on a

$$\varphi = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} = 0, \quad a = \text{tang.}\, \alpha = 0, \quad \psi = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{1}{\cos \beta};$$

et l'équation de l'intersection devient

$$y^2 + x^2 = z'^2 \left\{ \frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 \right\},$$

ou

$$y^2 + x^2 = z'^2 \text{tang}^2 \beta.$$

z' étant la distance du sommet du cône au plan des xy (fig. 33), z' tang β ou CO tang OCE représente la ligne OE ou le rayon du cercle. En faisant, pour plus de simplicité, ce rayon égal à R, on aura

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

C'est l'équation la plus simple de la circonférence du cercle. Il est visible que ce cas est compris dans la supposition générale qui donne $\varphi < 1$, ou le coefficient de x^2 positif. Le cercle est donc ainsi une espèce particulière d'ellipse. Il

se réduirait à un point, en supposant z' nul; car alors le plan coupant passerait par le centre du cône, qui deviendrait l'origine des coordonnées. En effet, cette supposition donne

$$x^2+y^2=0\,;$$

et le premier membre de cette équation, étant la somme de deux carrés, ne peut devenir nul par des valeurs réelles de x et de y, à moins qu'on n'ait séparément

$$x=0 \qquad y=0,$$

qui sont les équations de l'origine des coordonnées.

95. Généralement, si l'on fait $z'=0$ dans l'équation (2), c'est-à-dire, si l'on met le centre du cône dans le plan des xy, on trouve

$$y^2+(1-\varphi^2)\,x^2=0.$$

Si l'on a $\varphi<1$, cette équation aura ses deux termes de même signe; elle ne pourra être satisfaite qu'en faisant

$$y=0 \qquad x=0.$$

Elle appartiendra donc à un point qui sera l'origine des coordonnées. Ce cas comprend celui que nous venons d'examiner.

Mais si dans la même circonstance on a $\varphi=1$, alors l'équation précédente se réduit à son premier terme: elle est par conséquent satisfaite, en faisant

$$y=0,$$

c'est-à-dire qu'elle représente une ligne droite qui est l'axe même des x. Le cône est alors placé de manière à donner une parabole, puisque $\varphi=1$; mais son centre étant amené dans le plan des xy, cette parabole se réduit à une ligne droite.

Enfin si z' étant toujours nulle, on avait $\varphi > 1$, l'équation précédente ne serait plus composée de deux termes de même signe; et en la résolvant par rapport à y, on trouverait

$$y = \pm x \sqrt{\varphi^2 - 1}.$$

Alors $\varphi^2 - 1$ étant une quantité positive, ce résultat donnerait deux lignes droites,

$$y = + x \sqrt{\varphi^2 - 1} \quad y = - x \sqrt{\varphi^2 - 1},$$

qui passeraient toutes deux par l'origine des coordonnées. Dans ce cas, le cône est placé de manière à donner des hyperboles; mais son centre se trouvant dans le plan des xy, ces hyperboles se réduisent à deux lignes droites.

96. Les suppositions précédentes ne sont pas les seules qui puissent réduire ainsi l'équation générale de l'art. 89. Si l'on supposait, par exemple, $\beta = 0$, ce qui donne $\cos \beta = M = 1$, l'angle formé par la droite génératrice avec l'axe du cône serait nul : la surface conique se réduirait donc, dans ce cas, à une ligne droite qui serait cet axe lui-même; et suivant qu'il rencontrerait le plan des xy en un point, ou qu'il y serait compris tout entier, ou enfin qu'il lui serait parallèle, l'équation de l'intersection représenterait un point ou une ligne droite, ou deviendrait impossible.

Au contraire, si l'on supposait $\beta = 100°$, ce qui donne $\cos \beta = M = 0$, la droite génératrice serait constamment perpendiculaire à l'axe : elle engendrerait par conséquent un plan; et, suivant que ce plan couperait celui des xy, ou lui serait parallèle, l'équation de l'intersection appartiendrait à une ligne droite, ou deviendrait impossible.

La discussion de ces différens cas ne comporte aucune

difficulté : après les exemples que nous avons donnés dans ce qui précède, il suffira d'introduire dans l'équation générale de l'intersection les suppositions convenables, de la développer, et de voir à quoi elle se réduit. Les élèves feront bien de s'exercer à cette discussion qui contribuera à leur faire sentir la correspondance intime de l'analyse et de la géométrie. C'est pourquoi je me bornerai à leur indiquer ce sujet de travail.

97. Nous allons maintenant discuter en particulier chacune des courbes du second ordre que nous avons trouvées dans le cône. Nous déduirons des équations de ces courbes, leur position, leur forme et leurs caractères. Nous les comparerons ensuite les unes aux autres, pour découvrir leurs propriétés communes.

Mais puisque la nature de ces courbes ne dépend que du signe que prend le coefficient de x^2, nous pouvons encore simplifier l'équation de l'article 90, en lui laissant, sous ce point de vue, toute sa généralité. En effet, si nous plaçons le cône de manière qu'une de ses génératrices soit dirigée suivant l'axe des z, il suffira alors d'ouvrir plus ou moins l'angle au centre, pour obtenir une ellipse, une parabole ou une hyperbole. Cette nouvelle position du cône s'obtiendra évidemment, en faisant $\alpha = \beta$; car alors l'angle $\alpha - \beta$, que forme la génératrice avec l'axe des z, sera nul. Cette supposition donne

$$\varphi = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = a \qquad \psi = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha} = 1;$$

et l'équation générale de l'intersection prend cette forme très-simple

$$y^2 + (1 - a^2)\, x^2 + 2az'\, x = 0 \qquad (3).$$

Alors le cône est placé comme l'indique la figure 34, la quantité a étant la tangente de l'angle DCA.

Si a est plus petit que 1 (fig. 34), l'angle DCA est moindre que 50°; l'angle BCA, formé par les deux génératrices opposées, est plus petit qu'un droit, le plan des xy rencontre alors toutes les génératrices de la surface sur une des nappes qui la composent : l'intersection est donc une ellipse.

Si $a = 1$ (fig. 35), l'angle BCA est droit; la génératrice BC devient parallèle au plan coupant, et la section est une parabole.

Si a est plus grand que 1 (fig. 36) l'angle BCA est plus grand qu'un droit; le plan des xy rencontre les deux nappes de la surface conique, et l'intersection est une hyperbole.

Cette équation peut donc, tout aussi bien que l'équation (2), nous donner les équations des différentes courbes que nous avons à discuter; et, comme elle est beaucoup plus simple, nous l'emploierons de préférence.

DU CERCLE.

98. En coupant un cône droit par un plan perpendiculaire à son axe, nous avons eu pour l'équation de l'intersection

$$y^2 + x^2 = R^2.$$

Les coordonnées x et y étant perpendiculaires entre elles (fig. 37), $\sqrt{x^2+y^2}$ exprime la distance d'un point de la courbe à l'origine des coordonnées. L'équation précédente montre que cette distance est constante; elle

indique donc, par ce caractère, qu'en effet la courbe proposée est une circonférence de cercle dont le centre se trouve placé à l'origine des coordonnées : cette seule propriété suffirait pour décrire cette circonférence; mais on peut déterminer de même, d'après l'équation, toutes ses autres propriétés et toutes les circonstances de son cours.

Par exemple, si l'on veut connaître les points où elle coupe l'axe des x, il suffit de faire $y=0$; ce qui est le caractère des points situés sur cet axe; alors l'équation donne

$$x=\pm R.$$

Ce qui nous apprend que la courbe coupe l'axe des x en deux points différens, situés de part et d'autre de l'origine des coordonnées, et à une distance R de l'axe des y.

De même, en faisant $x=0$, on aura les points où la courbe coupe l'axe des y : cette supposition donne

$$y=\pm R.$$

Ainsi ces points sont au nombre de deux, situés de part et d'autre, et à une distance R de l'axe des x.

Pour suivre la marche de la courbe dans les points intermédiaires, prenons en général la valeur de y; elle sera

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}.$$

Les deux valeurs de y étant égales et de signes contraires, la courbe est symétrique au-dessus et au-dessous de l'axe des x.

Si l'on suppose x positif, les valeurs tant positives que négatives de y iront en décroissant depuis $x=0$, qui donne $y=\pm R$, jusqu'à $x=+R$, qui donne $y=0$. Si

l'on fait x plus grand que R, y devient imaginaire ; ce qui montre que la courbe ne s'étend pas, du côté des x positifs, au-delà de l'abscisse $x = + R$.

Les mêmes résultats se reproduisent en sens contraire du côté des x négatifs ; et l'on voit de même que la courbe ne s'étend pas, de ce côté, au-delà de l'abscisse $x = - R$. Elle est donc également symétrique de part et d'autre de l'axe des y, et elle est limitée sur les deux axes à la distance R de l'origine.

99. L'équation proposée peut se mettre sous cette forme

$$y^2 = (R + x)(R - x).$$

$R + x$ et $R - x$ sont les deux segmens dans lesquels l'ordonnée y coupe le diamètre : cette ordonnée est donc moyenne proportionnelle entre les deux segmens.

100. On trouve de même que deux cordes, menées des deux extrémités d'un diamètre à un même point de la courbe, sont perpendiculaires l'une à l'autre. En effet, si, par le point B', pour lequel $y = 0$ et $x = - R$, on mène une ligne droite inclinée d'une manière quelconque, elle aura (32) pour équation

$$y = a(x + R).$$

Si, par le point B, pour lequel $y = 0$ et $x = + R$, on mène une autre droite pareillement inclinée d'une manière quelconque, elle aura pour équation

$$y = a'(x - R).$$

Ces droites ainsi menées arbitrairement, pourraient se rencontrer dans un point quelconque ; mais, si l'on veut que leur point d'intersection se trouve sur la circonférence du cercle, il faudra que leurs équations subsistent en même tems et avec celle de cette circonférence, c'est-

à-dire qu'elles soient satisfaites par les mêmes valeurs de y et de x. Cette supposition donne trois équations entre ces deux variables, et par conséquent une de plus qu'il ne faut pour les déterminer. On pourra donc, en éliminant ces variables, parvenir à une équation qui ne les contiendra plus, et qui devra être satisfaite pour que les deux droites puissent se couper sur la circonférence : cette équation sera évidemment entre les quantités a et a', qui déterminent leur direction.

Pour l'obtenir, il faut donc combiner ensemble les trois équations

$$y = a\ (x + R)$$
$$y = a'\ (x - R)$$
$$y^2 = R^2 - x^2,$$

de manière à en chasser x et y; on y parviendra sans doute en prenant les valeurs de ces deux variables dans les deux premières équations, et les substituant dans la troisième ; mais on arrivera plus simplement au même but, en multipliant les deux premières équations membre à membre ; ce qui donne

$$y^2 = aa'\ (x^2 - R^2).$$

Car pour que ce résultat s'accorde avec l'équation

$$y^2 = R^2 - x^2,$$

qui est celle de la circonférence du cercle, il suffit que l'on ait

$$aa' = -1 \quad \text{ou} \quad aa' + 1 = 0\,;$$

c'est-à-dire (n°. 32) que deux droites qui sont menées par les extrémités opposées d'un même diamètre, et qui se rencontrent sur la circonférence, sont perpendiculaires l'une à l'autre.

101. On voit, par cet exemple, que, lorsqu'on doit combiner ensemble plusieurs équations pour en éliminer certaines quantités, il est quelquefois possible d'abréger l'opération par des procédés plus ou moins ingénieux; mais, en profitant de ces artifices pour rendre les calculs plus élégans et plus simples, il ne faut jamais voir, dans les changemens qu'ils opèrent, que le résultat et l'effet de l'élimination.

Et, comme les divers procédés, que l'on peut employer pour éliminer, introduisent quelquefois des facteurs étrangers à la question, ou en font disparaître, il faudra s'assurer que l'on a réellement trouvé le nombre de facteurs convenable; ce qui sera toujours indiqué par le nombre et le degré des équations entre lesquelles on a dû éliminer.

102. Par exemple, dans le cas précédent, si l'on eût d'abord cherché les valeurs de y et de x au moyen des deux premières équations, qui appartiennent aux deux lignes droites, on eût trouvé

$$y=\left\{\frac{a'+a}{a'-a}\right\}.R, \qquad y=\frac{2aa'}{a'-a}.\ R.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation du cercle, et réduisant, on trouve

$$aa'\ (aa'+1)=0.$$

Cette équation peut être satisfaite de plusieurs manières. D'abord, en faisant $aa'+1=0$, ce qui donne le résultat que nous avons déja obtenu par l'autre marche; secondement, en faisant $a=0$ ou $a'=0$, ce qui signifie que, si l'une des deux lignes est dirigée suivant l'axe des x, l'autre ligne peut être menée suivant telle direction que l'on voudra. Il est visible en effet que, dans

cette dernière supposition, les deux droites se couperont toujours sur la circonférence du cercle, puisqu'elles se rencontreront à l'extrémité du diamètre ; mais cette solution, quoique vraie, était étrangère à la propriété que nous voulions découvrir : c'est pourquoi nous avons pu nous dispenser d'y avoir égard.

103. En général, en suivant la marche que nous venons d'indiquer, on déduirait de la seule équation du cercle toutes les propriétés que démontre la géométrie élémentaire; et la raison en est que ces propriétés sont des résultats de sa définition, dont l'équation proposée n'est que la traduction analytique.

Réciproquement, en partant d'une des propriétés caractéristiques que nous avons démontrées, et reprenant d'une manière inverse la marche que nous avons suivie, on retomberait sur l'équation du cercle, si cette propriété ne convenait qu'à lui seul; auquel cas, elle serait équivalente à sa définition. Cela arriverait, par exemple, si l'on demandait que l'ordonnée fût moyenne proportionnelle entre les deux segmens, ou que les droites, menées des deux extrémités de la ligne BB', se coupassent à angles droits sur la courbe; mais on ne reviendrait pas jusqu'au cercle, si l'on choisissait quelqu'autre propriété qui convînt en même tems à d'autres lignes. Par exemple, il ne suffirait pas de demander que la courbe fût symétrique au-dessus et au-dessous de l'axe des x, ou qu'elle passât par les quatre points B, B', D, D', parce que, bien que ce soient là des propriétés du cercle, il peut y avoir d'autres courbes qui en jouissent également.

104. La forme que nous venons d'examiner n'est pas la seule sous laquelle se présente l'équation du cercle ; elle varie avec la position de l'origine des coordonnées. Si, par

exemple, au lieu de compter les abscisses du point A, nous voulions les compter de l'extrémité B' du diamètre BB', et toujours dans le même sens, alors, pour un point quelconque M, dont l'ancienne abscisse serait AP, la nouvelle serait $B'P$; et en nommant x' ces dernières, on aurait

$$x = x' - R.$$

Substituant cette valeur de x dans l'équation

$$y^2 + x^2 = R^2,$$

elle deviendra

$$y^2 + x'^2 - 2Rx' = 0.$$

Dans cette équation, $x = 0$ donne $y = 0$, parce que l'origine des coordonnées est un point de la courbe. En suivant la marche des valeurs qui en résultent pour les coordonnées des autres points, on reconnaîtrait pareillement qu'elle représente une circonférence de cercle, et l'on en verrait naître les diverses propriétés.

Ainsi, $\sqrt{x'^2 + y^2}$ exprimant la distance MB' d'un point de la courbe à la nouvelle origine, et le carré de cette distance étant, d'après l'équation même, égal au produit du diamètre $2R$ par l'abscisse x' ou $B'P$, on reconnaît cette propriété de la courbe d'être moyenne proportionnelle entre le diamètre et l'abscisse correspondante.

105. L'équation d'une circonférence de cercle devant exprimer que la distance des points de la courbe à un point donné est constante, elle doit toujours se rapporter à la formule que nous avons donnée (n°. 21), pour exprimer la distance de deux points. Si donc x', y', représentent les coordonnées du centre de la circonférence,

R son rayon, et x, y, les coordonnées d'un quelconque de ses points, on aura toujours

$$(x-x')^2+(y-y')^2=R^2.$$

Telle est par conséquent l'équation la plus générale de la circonférence du cercle rapportée à des axes rectangulaires.

L'origine des coordonnées ne se trouve plus placée ici comme dans les exemples précédens, au centre même du cercle, ou sur un point de la circonférence. En faisant $y=0$ pour avoir le point où la courbe coupe l'axe des x, on trouve

$$x=x'\pm\sqrt{R^2-y'^2};$$

et, en faisant $x=0$ pour avoir les points où elle coupe l'axe des y, on trouve

$$y=y'\pm\sqrt{R^2-x'^2}.$$

La première de ces expressions devient imaginaire quand y' est plus grand que R, et la seconde, quand x' est plus grand que R. En effet, si les distances x', y', du centre du cercle aux axes surpassent le rayon de ce même cercle, il ne rencontre point ces axes; et il se trouve placé, par rapport à eux, comme il l'est dans la fig. 38, où l'on a supposé x' et y' positifs.

En général, les diverses positions dans lesquelles une courbe peut être placée relativement à l'origine des coordonnées, font paraître son équation sous diverses formes, qui peuvent toujours se réduire les unes aux autres, puisqu'elles ne sont jamais que l'expression analytique de sa définition.

106. Cherchons maintenant l'équation d'une ligne droite

tangente au cercle dont l'équation est

$$x^2+y^2=R^2.$$

Soient x'', y'', les coordonnées du point de tangence, on aura entre elles la relation

$$x''^2+y''^2=R^2.$$

La tangente étant une ligne droite et passant par ce point, son équation sera de cette forme

$$y-y''=a\,(x-x'').$$

Il ne reste plus qu'à déterminer a.

Pour cela, nous considérerons la tangente comme une sécante dont les deux points d'intersection avec la courbe se réunissent en un seul; et nous emploierons cette propriété pour la définir.

Cherchons donc généralement les coordonnées d'intersection d'une sécante quelconque avec la circonférence : ces coordonnées doivent satisfaire en même tems aux trois équations précédentes ; car les points auxquels elles appartiennent se trouvent en même tems sur la circonférence et sur la droite. Il faut donc combiner ces équations ensemble, pour en tirer les valeurs des coordonnées par l'élimination. Or, en retranchant la seconde de la première, il vient

$$y^2-y''^2+x^2-x''^2=0\,,$$

ou

$$(y+y'')\,(y-y'')+(x+x'')\,(x-x'')=0.$$

Mettant pour y sa valeur $y''+a\,(x-x'')$, tirée de l'équation de la droite, on a

$$\{\,2ay''+a^2\,(x-x'')+x+x''\,\}\,(x-x'')=0.$$

Cette équation donnera généralement deux valeurs de

x, parce qu'il y a deux points communs à la droite et au cercle : une de ses racines est

$$x = x'' ;$$

valeur qui, étant substituée dans l'équation de la droite, donne

$$y = y'' ;$$

parce qu'en effet le point, dont les coordonnées sont x'' et y'', est déja commun à la droite et au cercle : l'autre facteur, étant égalé séparément à zéro, donnera

$$2\,ay'' + a^2\,(x - x'') + x + x'' = 0.$$

Cette équation fera connaître l'autre valeur de x, c'est-à-dire l'abscisse du second point d'intersection ; mais il faudra, pour cela, que a soit donné, c'est-à-dire, que la direction de la sécante soit connue, et l'on sent en effet que ces deux quantités sont dépendantes l'une de l'autre.

Dans la recherche qui nous occupe, nous ne connaissons pas la direction de la tangente, mais nous savons qu'elle doit être telle que les deux points d'intersection se réunissent en un seul : en sorte que, si on connaissait la valeur de a qui lui est propre, et qu'on la substituât dans l'équation précédente, la seconde valeur de x, que cette équation détermine, serait certainement x'', comme la première. Par conséquent, si nous mettons x'' au lieu de x dans l'équation précédente, la valeur de a, qui en résultera, sera nécessairement celle qui convient à la tangente. Cette substitution fait disparaître le terme multiplié par a^2, l'équation se réduit ainsi au premier degré, et devient

$$2\,ay'' + 2x'' = 0 ; \qquad \text{d'où} \qquad a = -\frac{x''}{y''}.$$

Cette manière de déterminer a, en éludant la résolution

de l'équation qui contient a^2, pourrait donner lieu, en apparence, à quelque difficulté; car si l'on résolvait directement cette équation qui est du second degré, et désignant par a' et a'' ses deux racines, on trouverait

$$a' = \frac{-y + \sqrt{y''^2 - (x+x'')(x-x'')}}{x-x''};$$

$$a'' = \frac{-y'' - \sqrt{y''^2 - (x+x'')(x-x'')}}{x-x''}.$$

Si, dans ces expressions, on suppose $x=x''$ pour les approprier particulièrement à la tangente, le numérateur et le dénominateur de a' deviennent nuls en même tems, on trouve $a' = \frac{0}{0}$, dans a'' le dénominateur seul devient nul, le numérateur se réduit à $-2y''$. et l'on trouve $a = -\frac{2y''}{0}$, valeurs qui ne pourraient pas s'accorder avec ce que nous avons trouvé par la première méthode.

Pour résoudre cette petite difficulté, occupons-nous d'abord de a', multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction qui l'exprime, par le facteur . . . . . . $y'' + \sqrt{y''^2 - (x+x'')(x-x'')}$; cette multiplication ne changera rien à sa valeur; par ce moyen on a

$$a' = \frac{y''^2 - (x+x'')(x-x'') - y''^2}{\{x-x''\}\{y'' + \sqrt{y''^2 - (x+x'')(x-x'')}\}},$$

ou

$$a' = \frac{-(x+x'')(x-x'')}{(x-x'')\{y'' + \sqrt{y''^2 - (x+x'')(x-x'')}\}}.$$

Les y'' sont donc disparus du numérateur, de plus les deux termes sont devenus divisibles par $x - x''$; effectuant cette division qui simplifie a', il reste

$$a' = \frac{-\{x + x''\}}{y'' + \sqrt{y''^2 - (x + x'')(x - x'')}}.$$

Si maintenant dans cette expression on fait $x = x''$, les deux termes de la fraction ne deviennent plus $\frac{0}{0}$, mais ils se réduisent à $-2x''$ et $2y''$, de sorte que l'on a

$$a' = \frac{-x''}{y''}.$$

C'est précisément la valeur que nous avions trouvée par notre première méthode.

On voit, par cette analyse, que si la valeur de a' s'est d'abord présentée sous la forme $\frac{0}{0}$, c'est parce que le numérateur et le dénominateur de la fraction qui l'exprime contenaient implicitement le facteur $x - x''$, qui s'évanouit quand $x = x''$. Mais par la transformation que nous avons fait subir à cette fraction ayant mis le facteur $x - x''$ en évidence, nous avons pu l'en dégager, après quoi les deux termes de la fraction ne se sont plus évanouis. L'analyse offre souvent des exemples de quantités qui se présentent ainsi sous la forme de $\frac{0}{0}$, mais c'est toujours par l'effet d'une combinaison analytique pareille à celle que nous venons de développer. Et alors, comme dans le cas actuel, on ne peut obtenir la véritable valeur de ces quantités, qu'après en avoir dégagé les facteurs communs qui leur font prendre cette forme en s'évanouissant.

Examinons maintenant la seconde valeur de a, que nous avons désignée par a''. Celle-ci se réduisant à $\frac{2y''}{0}$ quand $x = x''$, il s'ensuit qu'alors $\frac{1}{a''}$ est nul. Or $\frac{1}{a''}$ est la

cotangente de l'angle, dont a'' est la tangente trigonométrique. Cet angle ayant sa cotangente nulle, est donc égal 100°, et par conséquent la seconde valeur de a'' appartient à une ligne droite perpendiculaire à l'axe des x.

Ce résultat, quoiqu'étranger à celui que nous nous étions proposé d'obtenir, est cependant une conséquence des conditions analytiques que nous avons établies. En effet, nous avons écrit d'abord que la sécante était une ligne droite menée par le point de la courbe dont les coordonnées sont x'', y''. Et comme nous avons trouvé que cette sécante avait encore avec la courbe un autre point d'intersection, nous avons voulu que ce second point coïncidât avec le premier. Mais nous n'avons écrit cette coïncidence que pour les abscisses, car nous avons dit que l'abscisse de ce second point était aussi égale à x'', sans rien prononcer sur son ordonnée, qui n'entrait point dans notre équation. La résolution générale de celle-ci devait donc, outre la tangente, nous donner aussi une ligne droite perpendiculaire à l'axe des x, puisque cette droite satisfait évidemment aux conditions imposées, de passer par le point donné de la courbe, et de la couper encore dans un autre point dont l'abscisse soit x''.

Dans la première méthode où nous évitions la résolution de l'équation du second degré, nous faisions disparaître le terme $a^2(x-x'')$, en faisant $x-x''$ nul. Nous exprimions par là que la droite ou les droites que nous voulions obtenir, étaient celles qui satisfaisaient aux conditions d'intersection exigées, et pour lesquelles en outre la valeur de a n'était point infinie. En général, cette limitation restreignait l'équation aux seules valeurs de a, qui pouvaient donner des tangentes à la courbe. Et le résultat n'ayant donné qu'une valeur unique, il s'ensuit que pour chaque point donné de la circonférence d'un cercle, la tangente

est unique aussi. On voit ainsi que la première méthode était aussi exacte que l'autre; mais elle était en même tems plus élégante et plus directe.

107. La valeur de a étant déterminée, il ne reste plus qu'à la substituer dans l'équation de la tangente, qui devient

$$y-y''=-\frac{x''}{y''}(x-x'').$$

En la réduisant, et observant que les coordonnées x'', y'', appartiennent à un point de la circonférence du cercle, on peut lui donner cette forme très-simple

$$yy''+xx''=R^2.$$

La valeur que nous venons de trouver pour a étant unique, il s'ensuit qu'il n'y a, pour chaque point de la courbe, qu'une seule droite qui jouisse de la propriété par laquelle nous avons défini la tangente : on peut d'ailleurs s'assurer *à posteriori*, que cette définition est exacte; car la droite qui en résulte est toute entière hors du cercle, excepté dans le seul point qu'elle a de commun avec lui.

Cela se voit très-simplement au moyen des équations

$$yy''+xx''=R^2$$
$$y''^2+x''^2=R^2,$$

dont l'une appartient à la tangente, et dont l'autre signifie que le point de tangence est sur la circonférence du cercle. Si l'on double la première de ces équations, et qu'on la retranche de la seconde, il vient

$$y''^2-2yy''+x''^2-2xx''=-R^2.$$

En ajoutant x^2+y^2 à chacun des deux membres, le

résultat pourra se mettre sous la forme

$$(y-y'')^2+(x-x'')^2=x^2+y^2-R^2.$$

C'est la valeur de $x^2+y^2-R^2$ pour tous les points qui sont situés sur la tangente : cette valeur est toujours positive, excepté lorsque $x=x''$ et $y=y''$. Par conséquent, tous ces points, excepté celui de tangence, sont hors de la circonférence du cercle ; car, dans l'intérieur de cette circonférence, on a $x^2+y^2-R^2<0$; sur la circonférence même, $x^2+y^2-R^2=0$; et au dehors, $x^2+y^2-R^2>0$.

108. Une ligne droite, menée par le point de tangence perpendiculairement à la tangente, se nomme une *normale*. Si nous supposons pour son équation

$$y-y''=a'(x-x''),$$

la condition d'être perpendiculaire à la tangente donnera

$$aa'+1=0 \quad \text{ou} \quad a'=\frac{y''}{x''}.$$

Ainsi l'équation de la normale est pour le cercle,

$$y-y''=\frac{y''}{x''}(x-y'');$$

ou en réduisant,

$$yx''-y''x=0.$$

Cette ligne passe donc par l'origine des coordonnées, qui est ici le centre du cercle ; d'où l'on voit naître cette propriété comme dans les élémens de géométrie, que la tangente à la circonférence est perpendiculaire à l'extrémité du rayon qui passe par le point de tangence.

109. Nous avons supposé jusqu'ici le point de tangence donné sur la circonférence ; regardons-le maintenant

comme inconnu, et proposons-nous de le déterminer de manière que la tangente passe, par un point donné, hors du cercle. Soient x', y', les coordonnées de ce point; puisqu'il doit être sur la tangente, il doit satisfaire à l'équation de cette ligne; ce qui exige qu'on ait

$$y'y'' + x'x'' = R^2;$$

on a de plus,

$$y''^2 + x''^2 = R^2.$$

Ces deux équations serviront à déterminer les coordonnées x'', y'', du point de tangence en fonction de R, et des coordonnées x', y', du point donné. En substituant ces valeurs dans l'équation de la tangente et dans celle de la normale elles seront entièrement déterminées, et satisferont aux conditions demandées.

Les équations précédentes étant du second degré, donneront pour x'' et y'' deux valeurs. Il en résultera par conséquent deux points de tangence; et l'on pourra mener au cercle deux tangentes, qui passeront par le point donné.

110. Mais, au lieu d'effectuer directement cette élimination, et de calculer les valeurs de x'', et de y'' par l'extraction des racines carrées, il sera plus élégant et plus simple de chercher à déduire des équations proposées d'autres équations équivalentes, mais faciles à représenter par la géométrie, et dont la construction donne immédiatement les valeurs cherchées. En effet, c'est un principe d'algèbre que l'on peut substituer au système de deux équations deux autres équations qui s'en déduisent.

Or, si l'on retranche la première équation de la seconde, on trouve

$$y''^2 - y'y'' + x''^2 - x'x'' = 0;$$

résultat qui peut être mis sous la forme

$$\left\{y'' - \frac{y'}{2}\right\}^2 + \left\{x'' - \frac{x'}{2}\right\}^2 = \frac{x'^2 + y'^2}{4}.$$

En le comparant avec l'équation la plus générale du cercle, trouvée dans l'art. 125, on voit que le point de tangence, qui a pour coordonnées x'', y'', se trouve sur une circonférence de cercle dont les coordonnées du centre sont $\frac{x'}{2}$, $\frac{y'}{2}$, et dont le rayon est $\sqrt{\frac{x'^2 + y'^2}{4}}$. Cette circonférence a donc pour diamètre la distance du point donné au centre du cercle, ou $\sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Or, le point de tangence doit aussi se trouver sur la circonférence du cercle donné, et dont l'équation est

$$y'^2 + x'^2 = R^2.$$

Il se trouvera donc en même tems sur ces deux circonférences, et sera conséquemment donné par leur intersection; ce qui fournit un moyen très-simple de l'obtenir. De plus, les valeurs de x'' et de y'' seront doubles, puisque, d'après leurs positions, ces circonférences se couperont en deux points.

Cette construction indique même les cas où le problême devient impossible : ce sont ceux où le point donné serait intérieur à la circonférence du premier cercle, car alors les deux circonférences seraient intérieures l'une à l'autre, et par conséquent ne se couperaient pas.

Cette circonstance est également indiquée par l'analyse; car, si l'on élimine x'' entre les deux équations

$$y'y'' + x'x'' = R^2, \qquad y''^2 + x''^2 = R^2,$$

on trouve, pour déterminer y'', l'équation

$$y''^2 (x'^2 + y'^2) - 2R^2 y'y'' = R^2 (x'^2 - R^2),$$

qui, étant résolue par rapport à y'', donne

$$y''=\frac{R^2y'}{x'^2+y'^2}\pm\sqrt{\frac{R^2x'^2(x'^2+y'^2-R^2)}{(x'^2+y'^2)^2}}.$$

La quantité qui est sous le signe radical sera réelle, nulle ou imaginaire, selon que l'on aura $x'^2+y'^2-R^2>0$, $x'^2+y'^2-R^2=0$, $x'^2+y'^2-R^2<0$. Dans le premier cas, il y aura deux points de tangence; dans le second, il n'y en aura qu'un seul, dont les coordonnées seront y' et x'; dans le troisième, il n'y en aura point du tout. Aussi, dans le premier cas, le point donné est extérieur au cercle proposé; dans le second, il est situé sur sa circonférence; dans le troisième, il lui est intérieur.

111. Nous venons de voir qu'en rapportant la circonférence du cercle à des coordonnées rectangulaires comptées de son centre, son équation ne renferme que les carrés des variables y et x, et est de la forme

$$y^2+x^2=R^2.$$

On peut se demander s'il existe d'autres systêmes d'axes rectangulaires ou obliques, par rapport auxquels cette équation ait encore la forme précédente.

Pour nous en assurer, transformons les coordonnées x et y, sans changer leur origine, et substituons-leur d'autres coordonnées x', y', dirigées d'une manière quelconque, en sorte que les angles des nouveaux axes avec l'axe des x soient α et α'; on aura généralement (n° 80)

$$x=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha',\qquad y=x'\sin\alpha+y'\sin\alpha'.$$

En mettant ces valeurs de x et de y dans l'équation précédente de la circonférence du cercle, elle devient

$$y'^2(\cos^2\alpha'+\sin^2\alpha')+2x'y''(\cos\alpha\cos\alpha'+\sin\alpha\sin\alpha')+x'^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=R^2;$$

ou, en réduisant,

$$y'^2 + 2x'y' (\cos\alpha \cos\alpha' + \sin\alpha \sin\alpha') + x'^2 = R^2.$$

La forme de cette équation diffère de celle de la proposée, parce qu'elle contient un terme en $x'y'$; pour faire disparaître ce terme, il faut prendre les angles α et α', de manière que son coefficient soit nul ; ce qui exige qu'on ait

$$\cos\alpha \cos.\alpha' + \sin\alpha \sin\alpha' = 0;$$

ou en divisant par $\cos\alpha \cos\alpha'$,

$$\text{tang}\,\alpha\, \text{tang}\,\alpha' + 1 = 0.$$

Ce résultat nous apprend que les deux axes des x' et des y' doivent être perpendiculaires l'un à l'autre, et il n'y a pas d'autre moyen pour que la condition proposée soit remplie.

112. Dans les courbes du second ordre, on appelle *diamètres conjugués* les systêmes d'axes qui ont la propriété de ramener les équations à ne contenir que les carrés des variables. Nous verrons bientôt que, dans l'ellipse et dans l'hyperbole, il existe de semblables systêmes dans lesquels les axes sont inclinés les uns aux autres sous des angles obliques; mais on voit, par ce qui précède, que les diamètres conjugués dans le cercle sont toujours à angle droit.

113. Les divers résultats auxquels nous venons de parvenir se démontrent aisément par la simple géométrie ; mais j'ai cru devoir les déduire de l'analyse, afin de montrer comment elle peut les indiquer, et se plier aux diverses circonstances que l'on veut examiner : ce n'est qu'en l'appliquant d'abord à des recherches faciles, et dont les résultats puissent se vérifier aisément, qu'on apprend à en faire usage dans les questions plus compliquées.

DE L'ELLIPSE.

114. En coupant un cône droit, dont l'angle au centre était plus petit que 100°, par un plan perpendiculaire à une de ses génératrices, et par conséquent de manière à rencontrer toutes les génératrices sur une des nappes de la surface, nous avons eu pour l'équation de l'intersection (n°. 97)

$$y^2 + x^2 (1 - a^2) + 2az'x = 0.$$

a étant plus petit que 1, et les coordonnées x et y étant perpendiculaires entre elles, a et z' sont supposées positives; nous avons dit que cette courbe se nomme une *ellipse*.

Pour avoir les points où elle coupe l'axe des x (fig. 39), faisons $y = 0$, il viendra

$$x^2 (1 - a^2) + 2az'x = 0;$$

ce qui donne pour x deux valeurs

$$x = 0, \quad x = -\frac{2az'}{1 - a^2};$$

c'est-à-dire que cela a lieu dans deux points différens, dont l'un est l'origine même des coordonnées que nous supposons placée en B, et l'autre est situé du côté des abscisses négatives, à une distance $\frac{2az'}{1 - a^2}$ de cette origine.

En faisant $x = 0$, on aura les points où la courbe coupe l'axe des y : cette supposition donne

$$y^2 = 0;$$

c'est-à-dire que cette rencontre a lieu à l'origine même des

coordonnées. De plus, l'équation $y^2=0$ donnant deux valeurs nulles pour y, on peut considérer l'axe des y comme rencontrant la courbe en deux points qui se confondent en un seul; c'est-à-dire qu'il lui est tangent. Pour suivre de plus près la marche de la courbe, prenons en général la valeur de y, nous aurons

$$y=\pm\sqrt{-(1-a^2)\,x^2-2az'x}.$$

Ces deux valeurs étant égales et de signes contraires, la courbe est symétrique de part et d'autre de l'axe des x.

Tant que x reste positif, y est imaginaire, puisque $1-a^2$, a et z', sont des quantités positives; la courbe ne s'étend donc pas du côté des abscisses positives, et elle est limitée, dans ce sens, par l'axe des y.

x devenant négatif, on a

$$y=\pm\sqrt{-(1-a^2)\,x^2+2az'x}.$$

Les valeurs de y sont réelles tant que l'on a

$$(1-a^2)\,x^2<2az'x,$$

ou

$$x<\frac{2az'}{1-a^2}.$$

Mais elles deviennent imaginaires au-delà de cette limite; car, si l'on a

$$x>\frac{2az'}{1-a^2},$$

on en tire

$$(1-a^2)\,x^2>2az'x.$$

Par conséquent, la courbe ne s'étend, du côté des abscisses négatives, que depuis l'origine des coordonnées jusquà l'abscisse $\frac{2az'}{1-a^2}$, où elle coupe l'axe des x. Alors les deux

valeurs de y deviennent nulles en même tems, et l'ordonnée prolongée est tangente à la courbe. Ainsi les deux branches qui la composent, après s'être jointes à l'origine des coordonnées, s'étendent symétriquement l'une audessus, l'autre au-dessous de l'axe des abscisses, se rejoignent de nouveau sur cet axe, et rentrent ensuite sur ellesmêmes : la courbe est par conséquent fermée, comme le représente la fig. 39.

115. Transportons l'origine des coordonnées en A, au milieu de la ligne $\frac{2az'}{1-a^2}$, à égale distance des deux sommets B, B'. Si AP est une nouvelle abscisse désignée par x', l'ancienne abscisse sera BP, ou $= x$, et l'on aura toujours

$$x = \frac{-az'}{1-a^2} + x'.$$

Substituant pour x sa valeur dans l'équation de la courbe, il vient

$$y^2 + (1-a^2)\,x'^2 = \frac{a^2z'^2}{1-a^2}.$$

En faisant $y = 0$, on retrouve

$$x' = \pm\,\frac{az'}{1-a^2} \qquad \text{ou} \qquad x' = \pm\, AB,$$

comme cela devait être : mais ici la courbe rencontre en deux points le nouvel axe des y ; car en faisant $x = 0$, on a

$$y = \pm\,\frac{az'}{\sqrt{1-a^2}}.$$

C'est la limite de la courbe dans le sens des ordonnées.

L'équation de l'ellipse prend une forme très-élégante quand on y introduit les coordonnées des points dans lesquels elle coupe les axes des x et des y. Si l'on fait

$$A = \frac{az'}{1-a^2}, \quad B = \frac{az'}{\sqrt{1-a^2}},$$

on aura

$$1 - a^2 = \frac{B^2}{A^2}, \quad az' = \frac{B^2}{A}, \quad \frac{a^2z'^2}{1-a^2} = B^2;$$

ce qui donne

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

Les quantités $2A$ et $2B$ se nomment les *axes*, et le point A le *centre* de l'ellipse. Lorsque son équation se trouve ramenée à cette forme, les coordonnées étant rectangulaires, on dit qu'elle est rapportée *au centre et à ses axes.* Si ces axes sont égaux, on a simplement

$$y^2 + x^2 = A^2,$$

équation d'un cercle. Le cercle est donc une ellipse dont les axes sont égaux. On voit même, d'après l'équation de l'ellipse, qu'elle est également symétrique, comme le cercle, dans les différens quadrans. A mesure que nous avancerons dans l'examen des propriétés de ces courbes, nous reconnaîtrons de plus en plus leur analogie.

116. Pour distinguer les deux axes de l'ellipse, on a coutume d'appeler l'un le premier ou le grand axe, et l'autre le second. Il suffirait de changer y en x et réciproquement dans l'équation de cette courbe, pour que le premier axe devînt celui des ordonnées, et le second celui des abscisses ; on aurait alors

$$A^2x^2 + B^2y^2 = A^2B^2.$$

L'équation de l'ellipse ne change donc pas de forme lorsqu'on la rapporte à ses axes, quel que soit celui d'entre eux qu'on prenne pour l'axe des abscisses.

117. Toute droite, telle que mAM, menée par le centre de l'ellipse, et terminée de part et d'autre à cette courbe,

se nomme un *diamètre* : il est aisé de voir que les diamètres se trouvent tous divisés au centre, en deux parties égales. C'est une conséquence de la forme symétrique de la courbe.

118. La quantité $\frac{2B^2}{A}$ se nomme le *paramètre* de la courbe : c'est une troisième proportionnelle aux deux axes. D'après les expressions précédentes, elle est égale à $2az'$. Si l'on se reporte à l'art. 97 et à la fig. 34, on se rappellera que az' est la distance AD de l'origine des coordonnées au point où l'axe du cône rencontre le plan des xy, car le triangle ADC est rectangle ; c'est donc le double de cette distance qui est le paramètre de l'ellipse.

Pareillement, $\frac{2a}{1-a^2}$ est la tangente trigonométrique de l'angle au centre du cône; car cet angle est double de celui que forment les génératrices avec l'axe. $\frac{2az'}{1-a^2}$ est donc la distance du point où le plan xy rencontre la première génératrice qui se confond avec l'axe des z, jusqu'au point où il coupe la génératrice opposée ; et voilà pourquoi cette quantité $\frac{2az'}{1-a^2}$ exprime la distance des deux sommets de la courbe.

119. En introduisant les expressions des axes A et B dans l'équation

$$y^2+x^2(1-a^2)-2az'x=0,$$

où l'origine des coordonnées est au sommet B' de la courbe, elle devient

$$A^2y^2+B^2x^2=2B^2Ax,$$

et peut se mettre sous la forme

$$y^2=\frac{B^2}{A^2}(2Ax-x^2).$$

Si donc on désigne par $x'\ y'$, $x''\ y''$, les coordonnées de deux points quelconques de l'ellipse, on aura

$$\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{x'}{x''}\ \frac{(2A - x')}{(2A - x'')};$$

c'est-à-dire que les *carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits des distances du pied de ces ordonnées aux sommets de la courbe.*

120. L'équation de l'ellipse, rapportée à son centre et à ses axes, peut être mise sous cette forme

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2).$$

Si, du point A, comme centre avec un rayon AB égal à A (fig. 40), on décrit une circonférence de cercle, son équation sera

$$y^2 = A^2 - x^2;$$

d'où il suit qu'en représentant par y et Y les ordonnées de l'ellipse et du cercle qui correspondent aux mêmes abscisses, on aura généralement

$$y = \frac{B}{A}\ Y.$$

Suivant que B sera moindre ou plus grand que A, y sera moindre ou plus grand que Y. Par conséquent, si, du centre de l'ellipse, avec des rayons égaux à chacun de ses axes, on décrit deux circonférences de cercle, l'ellipse comprendra la plus petite, et sera comprise dans la plus grande (fig. 40).

Il suit de là que les deux axes de l'ellipse sont, l'un le plus grand, l'autre le plus petit de tous ses diamètres.

En vertu de la relation précédente, il suffit, pour trouver les ordonnées de l'ellipse, quand on connaît celles du

cercle décrit sur un de ses axes, de diminuer ou d'augmenter ces dernières dans le rapport de B à A : cette propriété donne plusieurs moyens de décrire une ellipse par points, lorsqu'on connaît les deux axes.

121. Du point A, comme centre, et avec les rayons AB, AC, égaux aux deux demi-axes A et B, on décrira deux circonférences de cercle (fig. 40) : ensuite on mènera un rayon quelconque ANM, et on abaissera du point M une perpendiculaire MP sur l'axe AP : menant ensuite NQ parallèle à AB, le point Q sera à l'ellipse, car il est visible que

$$PQ = \frac{AN}{AM} PM = \frac{B}{A} PM.$$

Seconde manière. D'un point quelconque D, pris sur le petit axe GC', et d'un rayon égal à la différence $A - B$ des deux demi-axes, on décrira un arc de cercle qui coupera BB' en O (fig. 41). Par les points O et D, on mènera OD, et l'on fera $DM = AB = A$: le point M sera à l'ellipse.

Car, si, du point D, comme centre, l'on décrit le cercle ME, dont le rayon $DM = A$, on aura

$$MO = B \text{ et } PM = \frac{MO}{DM} QM = \frac{B}{A} QM.$$

DM peut être une règle dont la longueur est A, et sur laquelle on marque un point O, tel que $MO = B$. En faisant mouvoir cette règle dans l'angle BAC', le point M décrira un quart de l'ellipse demandée : on aura les autres parties de l'ellipse en plaçant la règle dans les autres angles.

122. On vient de voir que, pour tous les points situés

sur l'ellipse, la valeur de l'ordonnée y est donnée par l'équation

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2),$$

pour un point situé hors de l'ellipse, mais relativement auquel l'abscisse x serait la même, la valeur de y^2 serait plus grande : on pourrait donc la représenter par l'expression

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2) + n^2.$$

n^2 étant une quantité positive. Au contraire, pour un point situé dans l'intérieur de l'ellipse, la valeur de y^2 serait plus petite, et prendrait la forme

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(A^2 - x^2) - n^2.$$

Ainsi, en faisant évanouir le dénominateur A^2, on voit que l'on aura toujours,

Hors de l'ellipse,	$A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2 > 0$
Sur l'ellipse,	$A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2 = 0$
Au dedans de l'ellipse,	$A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2 < 0.$

Par conséquent, pour savoir si un point est extérieur à l'ellipse, s'il est sur cette courbe, ou s'il lui est intérieur, il suffira d'observer le signe de la quantité $A^2y^2 + B^2x^2 - A^2B^2$. Cette propriété nous sera fort utile dans la suite.

123. Si, par le point B' (fig. 42), pour lequel $y = 0$, et $x = -A$, on mène une ligne droite inclinée d'une manière quelconque, elle aura pour équation (30)

$$y = a(x + A).$$

Si, par le point B, pour lequel $y = 0$, et $x = +A$,

on mène une autre ligne droite pareillement inclinée d'une manière quelconque, son équation sera

$$y = a' \,(x - A).$$

Supposons que l'on demande que ces droites se coupent sur l'ellipse : il faudra, pour cela, que leurs équations puissent subsister en même tems et avec celle de cette courbe (100). Or, en les multipliant membre à membre, elles donnent

$$y^2 = - aa' \,(A^2 - x^2)\,;$$

et, pour que ce résultat s'accorde toujours avec l'équation

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}\,(A^2 - x^2);$$

il faut qu'on ait

$$aa' = - \frac{B^2}{A^2}\,;$$

ce qui établit une relation constante entre les angles que forment avec le plus grand axe les cordes menées de ses extrémités : cette relation ne dépend que du rapport des axes. Dans le cercle, qui est une ellipse dont les deux axes A et B sont égaux entre eux, on a

$$aa' = - 1\,;$$

et les *cordes supplémentaires* s'y coupent à angles droits, comme nous l'avons vu dans l'art. 100.

Il est visible d'ailleurs qu'en effectuant directement l'élimination, comme dans l'art. 101, on trouverait de même, outre la condition précédente, l'équation $aa' = 0$, qui signifie que les droites pourraient encore se couper sur l'ellipse, si l'une d'elles coïncidait avec le grand axe ; mais cette relation, quoique vraie, est particulière à cette

position : elle est par conséquent étrangère à la propriété générale que nous nous proposions de découvrir. C'est pourquoi nous pouvons nous dispenser d'y avoir égard.

Réciproquement, lorsque cette équation a lieu entre les angles que forment deux droites avec l'axe des abscisses, ces droites sont des *cordes supplémentaires* d'une ellipse dans laquelle le rapport des axes est égal à $\frac{A}{B}$, c'est ce qu'il est aisé de voir en reprenant le calcul précédent d'une manière inverse.

Ces considérations nous conduisent à une propriété assez curieuse de l'ellipse. Imaginons que, sur son grand axe, comme diamètre, on décrive une circonférence de cercle : cette circonférence sera extérieure à l'ellipse ; et les lignes, menées de ses points aux extrémités du grand axe, formeront entre elles des angles droits. Par conséquent, les cordes supplémentaires, menées d'un même point de l'ellipse, feront entre elles des angles obtus, puisque leur sommet sera intérieur à la circonférence.

En faisant la même construction sur le petit axe, les propriétés seront inverses, puisque la circonférence sera intérieure à l'ellipse ; tous les angles formés sur cet axe par les cordes supplémentaires seront aigus.

Et il est facile de prouver que, de toutes les cordes supplémentaires que l'on peut mener aux extrémités des axes de l'ellipse, celles qui se coupent au sommet du petit axe forment entre elles l'angle le plus grand, et celles qui se coupent au sommet du grand axe forment l'angle le plus petit. Ces propriétés se démontreraient facilement en cherchant l'expression analytique de l'angle formé par deux cordes supplémentaires. Je laisse cette recherche à faire aux élèves qui voudront s'exercer.

124. A mesure que nous avançons dans l'examen des

propriétés de l'ellipse, nous voyons paraître une analogie frappante entre cette courbe et la circonférence du cercle. Guidés par cette analogie, cherchons à la rendre complette en comparant de plus en plus ces deux courbes dans leurs diverses propriétés.

Le cercle en offre une bien remarquable; c'est que les distances de tous ses points à son centre sont égales entre elles. Il est évident que cette propriété n'a plus lieu dans l'ellipse ; mais quelle est celle qui lui répond ? et comment pourrons-nous la découvrir ?

Nous y parviendrons en considérant l'ellipse comme une sorte de courbe à deux centres, qui ne jouissent point, chacun en particulier, de la propriété attachée au centre du cercle, mais qui en jouissent, pour ainsi dire, en commun. A cet effet, considérons deux points quelconques F, F' (fig. 43) situés sur le premier axe de l'ellipse, à égales distances de son centre; et menons de ces points à la courbe, les rayons FM, $F'M$, FM', $F'M'$. Ces rayons seront en général inégaux, et, de plus, ils varieront en sens contraire; c'est-à-dire que ceux qui partent du point F diminueront quand les autres augmentent, et réciproquement. Or, d'après la nature de l'ellipse, il est possible de choisir les centres FF' de manière que ces accroissemens et ces diminutions opposés soient égaux entre eux ; de sorte qu'en désignant par D, D' les rayons FM, $F'M$, leurs valeurs soient toujours de la forme

$$D = a + z, \qquad D' = a - z,$$

a étant constante, et z variable. Alors ce n'est plus la distance à un centre qui reste la même pour tous les points de la courbe, c'est la somme des distances aux deux centres, laquelle est égale à $2a$.

Pour développer cette propriété par le calcul, nommons $2c$ la distance FF' des deux centres ; et désignons toujours par x et y les coordonnées du point M, on aura

$$D^2 = y^2 + (x - c)^2$$
$$D'^2 = y^2 + (x + c)^2.$$

En développant ces expressions, et y substituant pour y^2 sa valeur $B^2 - \frac{B^2x^2}{A^2}$, elles deviennent

$$D^2 = B^2 + c^2 - 2cx + \frac{A^2 - B^2}{A^2} \cdot x^2$$

$$D'^2 = B^2 + c^2 + 2cx + \frac{A^2 - B^2}{A^2} \cdot x^2.$$

Ces valeurs de D, D', sont variables : pour savoir s'il est possible qu'elles se réduisent à la forme

$$D = a - z$$
$$D' = a + z,$$

il faut substituer ces expressions dans les équations précédentes, qui deviennent

$$a^2 - 2az + z^2 = B^2 + c^2 - 2cx + \frac{A^2 - B^2}{A^2} \cdot x^2$$

$$a^2 + 2az + z^2 = B^2 + c^2 + 2cx + \frac{A^2 - B^2}{A^2} \cdot x^2;$$

et il ne restera plus qu'à déterminer a et z, d'après ces équations, de manière à satisfaire aux conventions déja faites sur ces quantités.

Or, si l'on compare entre elles les quantités constantes qui se trouvent dans les deux membres de ces équations, on a, d'une part, a^2, et de l'autre, $B^2 + c^2$. Ainsi, pour que les équations puissent être satisfaites, quelles que soient les valeurs de x, il faut d'abord que ces quantités, indépendantes de x, soient égales entre elles ; ce qui donne la

condition

$$a^2 = B^2 + c^2$$

Alors les deux équations se réduisent aux suivantes

$$z^2 - 2az = \frac{A^2 - B^2}{A^2} \cdot x^2 - 2cx$$

$$z^2 + 2az = \frac{A^2 - B^2}{A^2} \cdot x^2 + 2cx.$$

En les retranchant l'une de l'autre, on trouve

$$4az = 4cx;$$

d'où

$$z = \frac{cx}{a}.$$

La forme de la variable z se trouve ainsi déterminée, et l'on voit qu'elle est essentiellement rationnelle en x : en la substituant dans les deux équations précédentes, elles se réduisent à une seule, qui est

$$\frac{c^2}{a^2} \cdot x^2 = \frac{A^2 - B^2}{A^2} \cdot x^2,$$

qui ne peut être satisfaite indépendamment de x qu'en faisant

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2}.$$

Cette condition, jointe à la précédente

$$a^2 = B^2 + c^2,$$

déterminera les deux quantités constantes a et c. Ces indéterminées suffisent donc pour rendre identiques les deux équations proposées; mais, pour que l'on en puisse tirer des résultats géométriques, il faut encore que les valeurs de a et de c soient réelles; et c'est ce que l'on verra en

cherchant, par les deux conditions précédentes, les valeurs de ces quantités.

Or, en tirant de la seconde la valeur de $\frac{c^2}{a^2}$, on a

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2}.$$

Cette expression, comparée à la première, donne sur-le-champ

$$a^2 = A^2;$$

d'où

$$a = \pm A;$$

d'où résulte pour c la valeur

$$c = \pm \sqrt{A^2 - B^2}.$$

Ce résultat sera toujours réel, lorsque A sera plus grand que B. Il y aura donc réellement sur le grand axe de l'ellipse deux centres qui jouiront de la propriété que nous leur avons supposée; mais le second axe n'en donnera pas d'analogues. On a trouvé d'ailleurs, par ce qui précède,

$$z = \frac{cx}{a}.$$

La valeur de z sera donc aussi complettement déterminée, et les expressions de D et D' deviendront

$$D = \pm A - \frac{cx}{A},$$

$$D' = \pm A + \frac{cx}{A}.$$

Ces valeurs se réduisent à $\pm A$, lorsque x est nul; mais, comme elles expriment les distances des points de la courbe aux points F, F', elles ne doivent jamais prendre de valeurs

négatives. Il faut donc nous borner au signe supérieur dans l'expression de a; ce qui donne

$$D = A - \frac{cx}{A}$$

$$D' = A + \frac{cx}{A}$$

$$c = \pm \sqrt{A^2 - B^2}.$$

La valeur de c qui exprime la distance des points F, F' à l'origine, est très-facile à construire ; il suffit (fig. 43) de décrire, de l'extrémité du petit axe, comme centre, une circonférence de cercle dont le rayon soit égal au demi grand axe A de l'ellipse. Cette circonférence coupera le grand axe en deux points, qui seront F et F' : ces points se nomment *les Foyers de l'ellipse*; leur distance c au centre de la courbe se nomme l'*Excentricité*. Quand $A=B$, la valeur de c est nulle; les deux foyers se réunissent en un seul, placé au centre de la courbe, et l'ellipse se réduit à un cercle.

On voit, par ce qui précède, que *la somme des distances d'un point quelconque de l'ellipse à ses deux foyers est constante et égale au grand axe*; *de plus, chacune de ces distances s'exprime rationnellement en fonction de l'abscisse qui lui correspond. Enfin les foyers de l'ellipse sont les seuls points qui jouissent de ces propriétés.*

Si l'on voulait se borner à vérifier ces résultats, en les démontrant *à posteriori*, il suffirait de donner, dès l'abord, à c la valeur $\sqrt{A^2 - B^2}$; et, substituant immédiatement cette valeur dans les premières expressions de D et de D', elles deviendraient

$$D^2 = y^2 + (x-c)^2 = B^2 - \frac{B^2x^2}{A^2} + x^2 - 2cx + A^2 - B^2 = \left\{A - \frac{cx}{A}\right\}^2.$$

$$D'^2 = y^2 + (x+c)^2 = B^2 - \frac{B^2x^2}{A^2} + x^2 + 2cx + A^2 - B^2 = \left\{A + \frac{cx}{A}\right\}^2;$$

ce qui donne, en extrayant la racine carrée,

$$D = A - \frac{cx}{A}, \qquad D' = A + \frac{cx}{A};$$

d'où l'on voit en effet qu'elles se réduiraient d'elles-mêmes, par cette substitution, à la forme rationnelle sous laquelle nous venons de les obtenir.

Il est également facile de voir qu'en faisant $x = \pm \sqrt{A^2 - B^2}$ dans l'équation de l'ellipse, on trouve $y = \pm \frac{B^2}{A}$; c'est-à-dire que, dans l'ellipse, la double ordonnée, qui passe par le foyer, est égale au paramètre.

125. Les propriétés précédentes donnent un moyen simple et commode pour décrire une ellipse quand on connaît son grand axe et la position de ses foyers.

On prendra du point B (fig. 43) une longueur quelconque BK sur l'axe BB'; du point F comme centre, avec BK pour rayon, on décrira un arc de cercle; du point F', comme centre avee $B'K$ pour rayon, on décrira un autre arc de cercle; le point M, où ces arcs se coupent, appartient à l'ellipse.

Il est avantageux de décrire les arcs de cercle au-dessus et au dessous de l'axe : par ce moyen, on trouve à chaque opération deux points de l'ellipse, et l'on en obtient quatre quand on porte successivement la même ouverture de compas à chacun des foyers.

Cette méthode est la plus expéditive que l'on connaisse pour décrire l'ellipse par points : il est visible qu'on peut l'employer lorsqu'on connaît les deux axes, puisqu'alors on trouve aisément la position des foyers.

Elle a cependant un léger inconvénient, c'est de ne pas donner les points de l'ellipse pour des abscisses déterminées ; ce qui est quelquefois nécessaire : mais alors on peut trouver ces points par les autres procédés que nous avons décrits.

Lorsque l'ellipse doit être fort grande, comme cela a lieu lorsque l'on opère sur le terrain, on fixe aux foyers les extrémités d'un cordeau dont la longueur est égale au grand axe, et que l'on tend par le moyen d'un piquet; on fait glisser ce piquet de manière que le cordeau soit toujours tendu, et la courbe se trouve tracée quand il a fait ainsi une révolution toute entière.

126. Occupons-nous maintenant de mener une tangente à l'ellipse, dont l'équation est

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

Soient x'', y'', les coordonnées du point de tangence ; elles vérifieront la relation

$$A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2.$$

La tangente étant une ligne droite, et devant passer par ce point, son équation sera de cette forme

$$y - y'' = a(x - x'').$$

Il ne reste plus qu'à déterminer a.

Pour y parvenir, nous chercherons les points où cette droite, considérée comme une sécante, rencontre la courbe ; et nous écrirons qu'ils se réunissent en un seul. Dans ces points, les trois équations précédentes ont lieu en même tems : retranchant les deux premières l'une de l'autre, on a

$$A^2(y-y'')(y+y'') + B^2(x-x'')(x+x'') = 0.$$

En mettant pour y sa valeur $y'' + a(x - x'')$, tirée de l'équation de la droite, on trouve

$$(x-x'')\{A^2(2ay''+a^2(x-x''))+B^2(x+x'')\}=0.$$

Une des racines de cette équation est

$$x=x'', \quad \text{et donne} \quad y=y'',$$

parce que le point donné est commun à la tangente et à la courbe : supprimant le facteur $(x - x'')$, il reste

$$A^2(2ay''+a^2(x-x''))+B^2(x+x'')=0.$$

Pour que la droite soit tangente, il faut que la seconde valeur de x soit x'', comme la première, ce qui exige qu'on ait

$$A^2ay''+B^2x''=0; \quad \text{d'où} \quad a=-\frac{B^2x''}{A^2y''}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation de la tangente à l'ellipse, elle devient

$$y-y''=-\frac{B^2x''}{A^2y''}(x-x'');$$

ou, en réduisant,

$$B^2yy''+B^2xx''=A^2B^2.$$

Comme il n'y a qu'une seule valeur de a, on ne peut mener, par chaque point de l'ellipse, qu'une seule tangente à cette courbe.

127. On peut ici, comme dans le cercle, prouver que la droite ainsi déterminée est toute entière hors de l'ellipse ; car, si l'on reprend les équations

$$A^2yy''+B^2xx''=A^2B^2$$
$$A^2y''^2+B^2x''^2=A^2B^2,$$

et qu'on retranche de la seconde le double de la première, le résultat pourra être mis sous la forme

$$A^2(y-y'')^2+B^2(x-x'')^2=A^2y^2+B^2x^2-A^2B^2.$$

La quantité $A^2y^2+B^2x^2-A^2B^2$ est donc constamment positive pour tous les points de la droite, excepté pour celui dont les coordonnées sont x'' et y'' : tous ces points, excepté celui de tangence, sont donc situés hors de l'ellipse.

128. Si par le centre et par le point de tangence, on mène un diamètre, son équation sera de la forme

$$y=a'x.$$

La condition de passer par le point de tangence donnera

$$y''=a'x'';$$

d'où

$$a'=\frac{y''}{x''}.$$

On vient de voir que la valeur de a, qui convient à la tangente, est

$$a=-\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x''}{y''}.$$

En multipliant l'une par l'autre les deux valeurs de a et de a', on trouve

$$aa'=-\frac{B^2}{A^2}.$$

Ce résultat, étant conforme à la condition obtenue dans l'art. 123, nous apprend (fig. 44) que la tangente et le diamètre qui passe par le point de tangence ont la propriété d'être les cordes supplémentaires d'une ellipse dont le rapport des axes est $\frac{B}{A}$, comme dans l'ellipse proposée.

Ceci fournit un moyen très-simple pour déterminer la direction de la tangente ; car, si l'on tire deux cordes supplémentaires quelconques, et qu'on désigne par α, α' les tangentes trigonométriques des angles qu'elles font avec l'axe, on aura toujours entre elles la relation

$$\alpha\alpha' = -\frac{B^2}{A^2}.$$

On peut mener une de ces cordes parallèle au diamètre qui passe par le point de tangence, alors on aura

$$\alpha' = a';$$

d'où résulte aussitôt

$$\alpha = a;$$

c'est-à-dire que l'autre corde sera parallèle à la tangente.

129. Ainsi, pour mener une tangente à l'ellipse par un point M donné sur cette courbe (fig. 44), il faut mener, de ce point au centre, le diamètre AM : par l'extrémité B' de l'axe BB', tirer la corde $B'N$ parallèle à AM ; MT, parallèle à BN, sera la tangente demandée.

On voit, par cette construction même, que, si l'on mène le diamètre AM' parallèle à la corde BN, ou à la tangente MT, la tangente de l'ellipse au point M' sera parallèle à la corde $B'N$, ou au diamètre AM.

130. Lorsque deux diamètres sont disposés, comme les précédens, de manière que chacun d'eux soit parallèle à la tangente menée à l'extrémité de l'autre, on les nomme *conjugués* (fig. 49). L'angle MAM', formé par deux diamètres conjugués, est évidemment égal à celui des deux cordes supplémentaires menées par les extrémités du premier axe, parallèlement à ces diamètres.

Et cette définition s'accorde avec celle de l'art. 137 ; car nous prouverons tout-à-l'heure que l'équation de

l'ellipse, rapportée à ses diamètres, conserve la même forme que par rapport à ses axes.

131. L'équation de l'ellipse étant de même forme par rapport à ses deux axes, les propriétés que nous venons de démontrer seront communes à l'un et à l'autre, et l'on pourra leur appliquer la même construction relativement aux cordes supplémentaires.

132. Pour avoir le point où la tangente rencontre l'axe des x (fig. 45), il faut supposer $y=0$ dans son équation, qui donne alors

$$x=\frac{A^2}{x''};$$

c'est la valeur de AT. En retranchant AP ou x'', on aura la distance PT du pied de l'ordonnée au point où la tangente rencontre l'axe des abscisses. Cette distance se nomme *Soutangente*; son expression est ici

$$PT=\frac{A^2-x''^2}{x''}.$$

Cette valeur est indépendante du second axe B; elle est donc la même pour toutes les ellipses qui ont le même premier axe A, et qui sont concentriques avec celle que nous considérons : elle convient par conséquent au cercle décrit du point A, comme centre, avec un rayon égal au demi grand axe. Ainsi, en prolongeant l'ordonnée MP de l'ellipse jusqu'à sa rencontre avec le cercle en M', et menant à ce point la tangente $M'T$, MT sera la tangente à l'ellipse au point M.

Cette construction s'appliquerait également au second axe, sur lequel l'expression de la soutangente serait indépendante de la valeur du premier.

133. Les formules précédentes peuvent encore être

employées lorsque la tangente doit être menée par un point extérieur à l'ellipse, et dont les coordonnées sont connues. En effet, en les supposant représentées par x', y', elles doivent vérifier l'équation de la tangente; ce qui donne

$$A^2y'y'' + B^2x'x'' = A^2B^2.$$

On a, de plus, le point de tangence étant sur l'ellipse,

$$A^2y''^2 + B^2x''^2 = A^2B^2.$$

En regardant x'', y'', comme inconnues, ces deux équations suffiront pour les déterminer, et on substituera ensuite leurs valeurs dans l'équation trouvée ci-dessus pour la tangente. Il est facile de déduire de ces formules un résultat analogue à celui que nous avons obtenu dans l'art. 110 pour le cercle. De plus, en éliminant y'' entre elles, on trouve

$$(A^2y'^2 + B^2x'^2)\,x''^2 - 2A^2B^2x'x'' - A^4(y'^2 - B^2) = 0.$$

Cette équation, qui est du second degré, donnera pour x'' deux valeurs; et ces valeurs seront réelles lorsque la quantité

$$A^4B^4x'^2 + A^4\left\{(y'^2 - B^2)(A^2y'^2 + B^2x'^2)\right\},$$

qui entrerait sous le signe radical, sera positive. Or, en réduisant cette quantité, elle devient

$$A^4y'^2\,(A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2).$$

Ainsi les deux valeurs de x'' seront réelles lorsque la quantité $A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2$ sera positive ou nulle, c'est-à-dire lorsque le point donné sera situé hors de l'ellipse, ou sur cette courbe. Dans ce cas, chaque valeur réelle de x'' donnera une valeur de y'' également réelle : il y aura donc deux points de tangence. Ainsi, par un

point donné hors de l'ellipse, on peut toujours mener deux tangentes à cette courbe, et on n'en peut mener davantage. Nous aurons bientôt des moyens faciles pour les construire géométriquement.

134. Occupons-nous maintenant de mener une normale à l'ellipse : puisque cette normale est une ligne droite qui passe par le point de tangence, son équation sera de la forme

$$y-y''=a'\,(x-x'').$$

Mais, de plus, elle doit être perpendiculaire à la tangente, pour laquelle on a

$$a=-\frac{B^2}{A^2}\cdot\frac{x''}{y''}.$$

Il faut donc qu'il existe entre a et a' la relation

$$aa'+1=0,$$

qui donne

$$a'=\frac{A^2}{B^2}\cdot\frac{y''}{x''}.$$

Alors l'équation de la normale devient

$$y-y''=\frac{A^2}{B^2}\cdot\frac{y''}{x''}\,(x-x'').$$

Pour avoir le point où elle rencontre l'axe des x, il faut supposer y nul ; et elle donne alors (fig. 46)

$$x=\frac{A^2-B^2}{A^2}\cdot x''.$$

C'est la valeur de AN : en la retranchant de AP, qui est représenté par x'', on aura la distance du pied de l'ordonnée au pied de la normale. Cette distance se nomme *Sou-normale*; et, d'après l'expression précédente, on trouve

pour sa valeur

$$PN = \frac{B^2 x''}{A^2}.$$

On aurait obtenu immédiatement ce résultat en prenant la valeur de $x - x''$ dans l'équation de la normale, après y avoir fait y nul. Cette valeur est positive ou négative, en même tems que x'', et le signe qu'elle prend indique sa position par rapport à l'origine. Cette remarque s'applique aussi à la soutangente.

135. Les directions de la tangente et de la normale dans l'ellipse ont un rapport remarquable avec celles des lignes menées des deux foyers aux points de tangence. Nous allons examiner ces propriétés.

Si, du foyer F, pour lequel $y = 0$, et $x = \sqrt{A^2 - B^2}$ (fig. 46), on mène une ligne droite au point de tangence, son équation sera de la forme

$$y - y'' = \alpha\,(x - x'').$$

Si l'on fait, pour plus de simplicité, $\sqrt{A^2 - B^2} = c$, la condition de passer par le foyer donnera

$$\alpha = -\frac{y''}{c - x''}.$$

La tangente à l'ellipse ayant pour équation (n°. 126)

$$y - y'' = a\,(x - x''),\quad a = -\frac{B^2 x''}{A^2 y''},$$

l'angle FMT, qu'elle forme avec la droite menée du foyer, aura pour tangente trigonométrique (n°. 17)

$$\frac{a - \alpha}{1 + a\alpha};$$

ou, en mettant pour a et α leurs valeurs,

$$\frac{A^2y''^2 + B^2x''^2 - B^2cx''}{A^2cy'' - (A^2 - B^2)x''y''},$$

cette quantité se réduit à

$$\frac{B^2}{cy''},$$

en observant que le point de tangence est sur l'ellipse, et que $A^2 - B^2 = c^2$.

Pareillement, si de l'autre foyer F', pour lequel $y = 0$, et $x = -c$, on mène au point de tangence une ligne droite, elle aura pour équation

$$y - y'' = a'(x - x''), \qquad a' = \frac{y''}{c + x''}.$$

L'angle $F'MT$ de cette droite avec la tangente à l'ellipse aura pour tangente trigonométrique

$$\frac{a - a'}{1 + aa'}, \text{ qui se réduit à } -\frac{B^2}{cy''}$$

quand on y met pour a et a' leurs valeurs.

Les angles FMT, $F'MT$, ayant leurs tangentes trigonométriques égales et de signes contraires, sont supplémens l'un de l'autre : ce qui donne

$$FMT + F'MT = 200^\circ;$$

et, comme on a aussi

$$F'MT + F'Mt = 200^\circ;$$

il en résulte

$$FMT = F'Mt.$$

Ce qui nous apprend que, *dans l'ellipse, les droites menées du point de tangence aux deux foyers font avec la tangente, et du même côté de cette ligne, des angles égaux.*

Il suit de là *que la normale divise en deux parties égales l'angle formé par les deux rayons vecteurs menés des foyers à un même point de la courbe.*

136. Cette propriété fournit une construction très-simple pour mener une tangente à l'ellipse par un point donné.

Supposons d'abord que ce point soit sur l'ellipse.

On mènera les rayons vecteurs $FM, F'M$ (fig. 47); on prolongera l'un des deux, par exemple, $F'M$, d'une quantité MK égale à FM. Joignant K et F, la ligne MT, perpendiculaire à FK, sera la tangente demandée; car, d'après cette construction, les angles TMF, TMK, $F'Mt$, sont égaux entre eux.

On peut aisément s'assurer qu'en effet la droite MT ne rencontre la courbe qu'au point M; car, pour tout autre point t de cette tangente, on aurait

$$Ft + F't > F'MK;$$

et, comme $F'MK = 2A$, le point t n'appartient pas à l'ellipse.

Si le point donné est extérieur à l'ellipse, et situé, par exemple, en t, du point F', comme centre avec un rayon égal au grand axe $2A$, on décrira un arc de cercle; du point t, comme centre avec un rayon tF, on décrira un autre arc de cercle qui coupera le premier en K. Menant $F'K$, le point M sera le point de tangence, et, joignant M et t par une ligne droite, on aura la tangente demandée.

En effet, d'après cette construction, $tF = tK$, de plus, $F'M + MF = 2A$, et $F'M + MK = 2A$: on a donc

$$MF = MK.$$

La ligne Mt est donc perpendiculaire sur le milieu de FK : donc les angles FMT, $F'Mt$, sont égaux, et la droite tMT est tangente à l'ellipse.

Les cercles décrits des points F' et t, comme centres, se

coupent en deux points. Cette construction donnera les deux tangentes que l'on peut mener à l'ellipse par un point extérieur.

De l'Ellipse rapportée à ses Diamètres conjugués.

137. Nous allons maintenant chercher les systêmes de coordonnées obliques, relativement auxquels l'ellipse conservera une équation de même forme que lorsqu'elle est rapportée à ses axes. Pour cela nous prendrons les formules

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha', \quad y = x' \sin \alpha + y' \sin \alpha',$$

qui servent à passer d'un systême de coordonnées rectangulaires à des coordonnées quelconques qui ont la même origine. En substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation de l'ellipse, qui est

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2,$$

elle devient

$$\left\{ \begin{array}{l} (A^2 \sin^2 \alpha' + B^2 \cos^2 \alpha') y'^2 + (A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha) x'^2 \\ \quad + 2 (A^2 \sin \alpha \sin \alpha' + B^2 \cos \alpha \cos \alpha') x' y' \end{array} \right\} = A^2 B^2.$$

Pour que cette équation soit de même forme que celle qui est relative aux axes, il faut qu'elle ne contienne point le rectangle $x' y'$ des coordonnées. Il faut donc profiter de l'indétermination de α et de α' pour faire disparaître ce terme, en rendant son coefficient nul; ce qui donne la condition,

$$(A^2 \sin \alpha \sin \alpha' + B^2 \cos \alpha \cos \alpha') = 0,$$

et l'équation de la courbe devient

$$(A^2 \sin^2 \alpha' + B^2 \cos^2 \alpha') y'^2 + (A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha) x'^2 = A^2 B^2.$$

Nous n'avons changé ici que la direction des coordonnées, sans changer l'origine. En effet, en déplaçant cette origine elle-même, on n'arriverait pas à un résultat plus général; car cette supposition ne ferait qu'ajouter aux valeurs de x, y des termes constans a et b, qui introduiraient dans la transformée les premières puissances des variables x', y', et, pour faire disparaître ces termes, on serait obligé d'égaler à zéro les quantités a et b qui les produisent.

138. Bornons-nous donc aux résultats que nous venons d'obtenir, et cherchons à les interpréter. La condition qui existe entre α et α' ne suffit pas pour déterminer ces deux angles; elle fait seulement connaître l'un d'eux, quand l'autre est connu. On peut donc prendre l'un des deux à volonté, et par conséquent il existe une infinité de systèmes de coordonnées obliques tels que ceux que nous cherchons.

Un de ces systèmes est celui même des axes de l'ellipse; car la relation de α et de α' est satisfaite quand on suppose $\sin\alpha = 0$, et $\cos\alpha' = 0$; ce qui fait coïncider les x' avec les x, et les y' avec les y. Aussi, par ces suppositions, retombe-t-on sur l'équation aux axes : mais c'est là le seul système de diamètres conjugués qui puisse être rectangulaire, car l'équation de condition peut être mise sous la forme

$$\tang\alpha \tang\alpha' = -\frac{B^2}{A^2};$$

et l'on voit bien alors qu'en ne rendant point infinie $\tang\alpha$ ou $\tang\alpha'$, ce qui nous ramènerait au cas précédent, il est impossible d'obtenir des coordonnées rectangulaires; car on aurait, pour un pareil système,

$$\tang\alpha \tang\alpha' = -1.$$

Et, tant que $\tang\alpha$ et $\tang\alpha'$ sont des quantités finies, il est impossible que l'équation précédente se réduise à cette

forme. Ainsi il y a pour l'ellipse une infinité de systêmes de diamètres conjugués, du nombre desquels sont les axes ; mais ceux-ci sont les seuls qui se coupent à angles droits.

139. En faisant successivement $y'=0$, $x'=0$, on aura les distances de l'origine des coordonnées aux points dans lesquels la courbe coupe les diamètres auxquels elle est rapportée. Si on représente ces distances par A' et B', la première étant comptée sur l'axe des x', et la seconde sur l'axe des y', on trouve

$$A'^2=\frac{A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha+B^2\cos^2\alpha},\quad B'^2=\frac{A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha'+B^2\cos^2\alpha'};$$

et l'équation de la courbe devient

$$A'^2y'^2+B'^2x'^2=A'^2B'^2.$$

$2A'$, $2B'$, représentant les longueurs des deux diamètres conjugués. On appelle paramètre d'un diamètre une troisième proportionnelle à ce diamètre et à son conjugué : d'après cela, $\frac{2B'^2}{A'}$ est le paramètre du diamètre $2A'$, et $\frac{2A'^2}{B'}$ est celui de son conjugué $2B'$. Nous ne ferons pas un usage particulier de ces quantités, et nous n'en parlons que parce qu'elles sont fréquemment employées dans les traités synthétiques.

140. Si l'on multiplie l'une par l'autre les valeurs de A'^2 et de B'^2, il vient

$$A'^2B'^2=\frac{A^4B^4}{A^4\sin^2\alpha'\sin^2\alpha+A^2B^2(\sin^2\alpha\cos^2\alpha'+\cos^2\alpha\sin^2\alpha')+B^4\cos^2\alpha\cos^2\alpha'};$$

résultat qui peut se mettre sous la forme

$$A'^2B'^2=\frac{A^4B^4}{(A^2\sin\alpha'\sin\alpha+B^2\cos\alpha'\cos\alpha)^2+A^2B^2\sin^2(\alpha'-\alpha)}.$$

La première partie du dénominateur s'évanouit en vertu de la relation qui existe entre α' et α, et, en réunissant les autres termes, on a simplement

$$A'^2 B'^2 = \frac{A^2 B^2}{\sin^2(\alpha'-\alpha)};$$

qui donne

$$AB = A'B' \sin(\alpha'-\alpha).$$

L'angle $\alpha'-\alpha$ est celui que forment les deux diamètres conjugués entre eux (fig. 48). Par conséquent, $A'B' \sin(\alpha'-\alpha)$ exprime l'aire du parallélogramme $AC'R'B'$: cette aire est donc égale au rectangle $ACRB$ formé sur les axes; d'où résulte ce théorème, que, *dans l'ellipse, le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués quelconques est équivalent au rectangle construit sur les axes.*

Cette valeur de AB étant substituée dans les expressions de A'^2 et de B'^2, elles donnent

$$B'^2 \sin^2(\alpha'-\alpha) = A^2 \sin^2\alpha + B^2 \cos^2\alpha$$
$$A'^2 \sin^2(\alpha'-\alpha) = A^2 \sin^2\alpha' + B^2 \cos^2\alpha'.$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$B'^2 \sin^2(\alpha'-\alpha) = A^2 \sin^2\alpha'(\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha') + B^2 \cos^2\alpha(\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha')$$
$$A'^2 \sin^2(\alpha'-\alpha) = A^2 \sin^2\alpha'(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + B^2 \cos^2\alpha'(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha).$$

En ajoutant ces équations, et effectuant les multiplications indiquées, on trouve

$$(A'^2+B'^2)\sin^2(\alpha'-\alpha) = (A^2+B^2)(\sin^2\alpha\cos^2\alpha' + \cos^2\alpha\sin^2\alpha')$$
$$+ 2A^2\sin^2\alpha\sin^2\alpha' + 2B^2\cos^2\alpha\cos^2\alpha'.$$

Il ne manque au coefficient de A^2+B^2 qu'un terme pour être égal à $\sin^2(\alpha'-\alpha)$. En le complettant, l'équation précédente devient

$$(A'^2 + B'^2)\sin^2(\alpha' - \alpha) = (A^2 + B^2)\sin^2(\alpha' - \alpha)$$
$$+ 2\sin\alpha\sin\alpha'\,(A^2\sin\alpha\sin\alpha' + B^2\cos\alpha\cos\alpha')$$
$$+ 2\cos\alpha\cos\alpha'\,(A^2\sin\alpha\sin\alpha' + B^2\cos\alpha\cos\alpha').$$

La partie indépendante de $\sin(\alpha' - \alpha)$ s'évanouit d'elle-même en vertu de l'équation de condition entre α et α' ; et, en divisant le reste par le facteur commun $\sin^2(\alpha' - \alpha)$, on trouve

$$A'^2 + B'^2 = A^2 + B^2;$$

c'est-à-dire que, *dans l'ellipse, la somme des carrés de deux diamètres conjugués est toujours égale à la somme des carrés des deux axes.*

141. Les trois équations

$$A^2 \tang\alpha\tang\alpha' + B^2 = 0$$
$$AB = A'B'\sin(\alpha' - \alpha)$$
$$A^2 + B^2 = A'^2 + B'^2$$

suffisent pour déterminer trois quelconques des six quantités

$$A,\ B,\ A',\ B',\ \alpha,\ \alpha',$$

lorsque les trois autres sont connues : elles peuvent par conséquent servir à résoudre toutes les questions relatives à la recherche des diamètres conjugués, quand on connaît les axes, et réciproquement.

142. En comparant la première de ces équations avec la relation trouvée dans l'art. 123, pour que deux droites menées des deux extrémités du grand axe se coupent sur l'ellipse, on voit que les angles α, α', satisfont à cette condition. Il est donc toujours possible de mener, par les deux extrémités du grand axe, deux droites qui se coupent sur l'ellipse, et qui soient parallèles à deux diamètres conjugués donnés ; ce qui s'accorde avec ce qu'on a vu dans l'art. 130.

De là résulte un moyen très-simple de trouver deux diamètres conjugués qui fassent entre eux un angle donné, en supposant que l'on connaisse les axes de l'ellipse.

Sur l'un de ces axes, on décrira un arc de cercle capable de l'angle donné. Par un des points où cet arc coupera l'ellipse, on mènera aux extrémités de l'axe des cordes supplémentaires; elles seront parallèles aux diamètres cherchés. Ainsi, en leur menant des parallèles par le centre de l'ellipse, on aura ces diamètres.

On fera cette construction sur le grand axe, si l'angle donné est obtus; sur le petit, s'il est aigu. Lorsque cet angle sortira des limites assignées pour les diamètres conjugués, le problème sera impossible, et l'arc du cercle ne coupera pas la courbe.

Il est visible que cette construction s'accorde avec les équations précédentes, et avec les considérations de l'article 123. On pourrait aisément la traduire en analyse ; et, en la combinant avec l'équation de l'ellipse, on trouverait le nombre des solutions et les conditions d'impossibilité. Je laisse cette recherche à faire aux élèves qui voudront s'exercer.

143. Si l'on demandait que les diamètres conjugués cherchés fussent égaux entre eux, on aurait, en égalant les valeurs trouvées dans l'art. 140,

$$A^2 \sin^2 \alpha + B^2 \cos^2 \alpha = A^2 \sin^2 \alpha' + B^2 \cos^2 \alpha' ;$$

d'où l'on tire

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha', \qquad \cos^2 \alpha = \cos^2 \alpha',$$

et enfin

$$\sin \alpha = \pm \sin \alpha', \qquad \cos \alpha = \pm \cos \alpha'.$$

On ne peut pas prendre ces valeurs avec le même signe, parce que l'équation

$$A^2 \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha' + B^2 = 0$$

exige que tang α et tang α' soient de signes contraires : il faut par conséquent qu'on ait

$$\sin \alpha = \sin \alpha', \qquad \cos \alpha = -\cos \alpha',$$

ou bien

$$\sin \alpha = -\sin \alpha', \qquad \cos \alpha = \cos \alpha'.$$

Mais il est aisé de voir que ces suppositions conduisent au même système de coordonnées; et l'équation précédente donne toujours

$$\operatorname{tang} \alpha = \pm \frac{B}{A},$$

le signe inférieur étant relatif à un des diamètres, et l'autre à son conjugué. Si donc, par les extrémités des axes de l'ellipse, on mène des cordes BC, $B'C$ (fig. 49), les diamètres parallèles à ces cordes seront conjugués et égaux.

L'ellipse rapportée à ces diamètres a pour équation

$$y'^2 + x'^2 = A'^2,$$

qui est analogue à celle du cercle entre les coordonnées rectangulaires.

144. Parmi toutes les cordes menées des extrémités B, B de l'axe à un même point de la courbe, BC et $B'C$ sont celles qui comprennent le plus grand angle : par conséquent, l'angle obtus, formé par les diamètres conjugués égaux, est le plus grand de tous ceux qui sont formés par deux diamètres conjugués.

145. Reprenons maintenant l'équation

$$A'^2 y'^2 + B'^2 x'^2 = A'^2 B'^2.$$

Pour plus de simplicité, nous supprimerons les accens des

variables x', y', en nous rappelant toutefois qu'elles se comptent sur des axes obliques, et nous écrirons

$$A'^2 y^2 + B'^2 x^2 = A'^2 B'^2.$$

Cette relation étant absolument de même forme que celle qui est relative aux axes, toutes les propriétés indépendantes de l'inclinaison des ordonnées seront communes aux axes de l'ellipse et à ses diamètres conjugués.

Ainsi chaque diamètre divisera en deux parties égales les ordonnées parallèles à son conjugué; mais comme ils ne sont pas à angle droit l'un sur l'autre, la courbe ne sera pas symétrique de part et d'autre de chacun d'eux.

De plus, la valeur de y^2 étant

$$y^2 = \frac{B'^2}{A'^2}(A'^2 - x^2),$$

on aura, en nommant y'', x'', les coordonnées d'un autre point de la courbe,

$$\frac{y^2}{y''^2} = \frac{(A' + x)(A' - x)}{(A' + x'')(A' - x'')}.$$

$A' + x$, $A' - x$, sont les distances du pied de l'ordonnée MP aux extrémités B, b du diamètre bAB (fig. 50): *les carrés des ordonnées aux diamètres conjugués sont donc proportionnels aux produits des segmens qu'elles forment sur ces diamètres.*

146. On tire de là un moyen fort simple de décrire une ellipse lorsqu'on connaît deux de ses diamètres conjugués $2A'$, $2B'$, et l'angle qu'ils font entre eux. Sur le premier, par exemple, on décrira une ellipse dont les axes soient $2A'$ et $2B'$; ensuite on inclinera les ordonnées NP, $N'P'$ sous l'angle donné, sans changer leur longueur, et les points M, M', trouvés par ce procédé, appartiendront à la courbe cherchée.

147. L'équation de la ligne droite étant de même forme entre des coordonnées obliques qu'entre des coordonnées rectangulaires, la combinaison de la ligne droite et de l'ellipse rapportée à des diamètres conjugués dépendra des mêmes formules que dans le cas où cette courbe est rapportée à ses axes; et l'on obtiendra par conséquent, dans ces deux systèmes, des résultats analogues.

Nommons β l'angle que forment entre eux les diamètres conjugués $2A'$ et $2B'$ (fig. 51). Si, par le point D, pour lequel $y=0$, et $x=A'$, on mène une ligne droite qui fasse avec l'axe AX un angle α, il résulte de l'art. 25 que son équation sera de cette forme

$$y=a\,(x-A') \qquad a=\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha')}.$$

Si, par le point D', pour lequel $y=0$, et $x=-A'$, on mène une autre droite dont α' soit l'angle avec l'axe des x, on aura

$$y=a'\,(x+A') \qquad a'=\frac{\sin\alpha'}{\sin(\beta-\alpha')}.$$

Pour que ces droites se coupent sur l'ellipse, il faudra combiner leurs équations avec la suivante

$$A'^2y^2+B'^2x^2=A'^2B'^2,$$

qui appartient à cette courbe : mais, le système de ces équations étant le même que dans l'art. 123, le résultat entre a et a' sera aussi le même, et il viendra

$$A'^2aa'+B'^2=0$$

pour la condition que les droites se coupent sur l'ellipse. Mais ici a et a' ne désignent plus les tangentes trigonométriques des angles que ces droites font avec l'axe

des x : elles expriment les rapports des sinus des angles qu'elles font avec les deux axes des coordonnées.

148. Si l'on veut mener une tangente à l'ellipse par un de ses points, en nommant x'', y'' ses coordonnées rapportées aux diamètres, on aura

$$A'^2 y''^2 + B'^2 x''^2 = A'^2 B'^2.$$

La tangente étant une ligne droite, et devant passer par ce point, son équation sera de cette forme

$$y - y'' = a(x - x''),$$

a étant une constante qu'il s'agit de déterminer.

Pour y parvenir, on combinera les deux équations précédentes avec celle de l'ellipse, qui est

$$A'^2 y^2 + B'^2 x^2 = A'^2 B'^2,$$

en raisonnant comme dans l'art. 126 ; mais le système des formules employées étant aussi le même, on trouvera, comme dans ce cas,

$$a = -\frac{B'^2}{A'^2} \cdot \frac{x''}{y''};$$

et l'équation de la tangente deviendra

$$y - y'' = -\frac{B'^2}{A'^2} \cdot \frac{x''}{y''}(x - x''),$$

ou, en réduisant

$$A'^2 y y'' + B'^2 x x'' = A'^2 B'^2;$$

c'est-à-dire qu'elle aura la même forme que dans le cas des axes. Il est visible que l'expression de la soutangente qui s'en déduit sera aussi la même.

149. Si, par le centre de l'ellipse, qui est aussi l'origine

des coordonnées, on mène une ligne droite, son équation sera de cette forme

$$y = a'x.$$

Si cette droite passe par le point de tangence, il faudra que l'on ait

$$y'' = a'x''; \quad \text{d'où} \quad a' = \frac{y''}{x''}.$$

Cette valeur de a' étant multipliée par celle de a, qui convient à la tangente, il vient

$$aa' = -\frac{B'^2}{A'^2}.$$

En comparant cette relation avec le résultat de l'article précédent, on voit que le point de tangence est sur une ellipse rapportée à des diamètres conjugués parallèles à ceux de la proposée, et dont le rapport est le même. Cette ellipse passant par l'origine des coordonnées et par le point où la tangente rencontre l'axe des x, un de ces diamètres est la distance de ce point à l'origine.

150. Ceci fournit un moyen de mener une tangente à l'ellipse, par un point pris sur cette courbe, sans connaître ses axes (fig. 52); car, si, de ce point M, on mène au centre le diamètre AM, et que, par l'extrémité D' du diamètre DD', on mène $D'N$ parallèle à AM, MT, parallèle à DN, sera la tangente demandée. Cela se prouve aisément en appliquant ici le raisonnement dont nous avons fait usage dans l'art. 128.

Cette construction suppose seulement que l'on connaisse un diamètre DD' et le centre A de l'ellipse; et, comme on peut facilement mener les diamètres lorsque le centre est donné, il s'ensuit que la méthode précédente donne le moyen de mener une tangente à une ellipse donnée par un

point pris sur cette courbe, lorsque l'on connaît son centre.

151. Si l'on mène le diamètre AM' parallèle à la tangente MT, la tangente au point M' sera parallèle à $D'N$, et par conséquent à AM : les deux diamètres AM, AM', seront donc conjugués l'un de l'autre, et l'angle $M'AM$, compris entre eux, sera égal à l'angle $D'ND$ formé par les deux cordes supplémentaires qui leur sont respectivement parallèles.

Ainsi, pour avoir deux diamètres conjugués qui fassent entre eux un angle donné, il faut, sur un diamètre quelconque DD', décrire un arc de cercle capable de cet angle (fig. 53). Par le point N, où l'arc coupera l'ellipse, on mènera aux extrémités du diamètre les cordes DN, $D'N$, qui seront respectivement parallèles aux diamètres cherchés : on pourra donc mener ceux-ci, puisque le centre de l'ellipse est d'ailleurs connu.

152. Si les diamètres demandés sont les deux axes de l'ellipse, leur angle est droit, et l'arc de cercle devient concentrique à la courbe (fig. 53). Ainsi, pour trouver les axes d'une ellipse donnée, lorsque l'on connaît son centre, il faut, sur un quelconque de ses diamètres, décrire une circonférence de cercle; par un des points d'intersection, mener des cordes aux extrémités du diamètre, et par le centre, des parallèles à ces cordes : ce seront les axes demandés.

153. Il serait facile, en suivant la marche que nous avons tenue, de revenir de l'équation

$$A'^2y^2 + B'^2x^2 = A'^2B'^2$$

relative aux diamètres conjugués, à celle qui appartient aux axes : on retomberait ainsi sur les relations que nous

venons d'établir, et il devient par conséquent inutile que nous nous y arrêtions plus longtems.

Sur l'Equation polaire de l'Ellipse, et sur la Mesure de sa surface.

154. Dans ce qui précède, nous avons déduit de la seule équation de l'ellipse les diverses circonstances qui la caractérisent : réciproquement, une seule de ces circonstances nous reconduirait à son équation.

Proposons-nous, par exemple, de trouver une courbe telle que la somme des distances de chacun de ses points à deux points donnés soit constante et égale à $2A$.

Soient F, F', les points donnés (fig. 54). Plaçons l'origine des abscisses en A, au milieu de la ligne FF', que nous ferons égale à $2c$; et supposant que M soit un point de la courbe, nommons AP, x; PM, y, et désignons par z, z' les distances FM et $F'M$: nous aurons pour les équations du problème,

$$z^2 = y^2 + (c - x)^2, \quad z'^2 = y^2 + (c + x)^2,$$
$$z + z' = 2A.$$

Ajoutons et retranchons successivement les deux premières équations membre à membre, il viendra

$$z^2 + z'^2 = 2(y^2 + x^2 + c^2), \quad z'^2 - z^2 = 4cx.$$

La seconde peut se mettre sous cette forme,

$$(z' + z)(z' - z) = 4cx.$$

Substituant pour $z + z'$ sa valeur tirée de l'équation

$$z' + z = 2A,$$

il vient

$$z' - z = \frac{2cx}{A},$$

d'où l'on tire

$$z' = A + \frac{cx}{A}, \qquad z = A - \frac{cx}{A}.$$

Mettant ces valeurs dans l'équation qui donne $z'^2 + z^2$, il vient

$$A^2 + \frac{c^2 x^2}{A^2} = y^2 + x^2 + c^2,$$

ou

$$A^2 (y^2 + x^2) - c^2 x^2 = A^2 (A^2 - c^2).$$

Lorsqu'on fait x nul, cette équation donne

$$y^2 = A^2 - c^2.$$

C'est le carré de l'ordonnée de la courbe à l'origine. Comme c est nécessairement moindre que A, d'après les données de la question, cette ordonnée est réelle ; et, en la représentant par B, on a

$$B^2 = A^2 - c^2.$$

Si l'on tire de ce résultat la valeur de c, l'équation de la courbe devient

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2,$$

qui est l'équation d'une ellipse rapportée au centre et à ses axes.

155. Avant qu'on eût éliminé les quantités z et z', l'ellipse était aussi bien caractérisée par l'une ou l'autre des équations

$$z' = A + \frac{cx}{A}, \qquad z = A - \frac{cx}{A},$$

que par celle à laquelle nous sommes parvenus ensuite ; car les distances z et z', étant variables en même tems,

que l'abscisse x, peuvent convenir successivement à tous les points de la courbe, et servir à les déterminer lorsque x est connu. On peut donc regarder les variables z et x, ou z' et x', comme formant un véritable système de coordonnées qui ne sont plus rectangulaires; mais il convient que ces coordonnées partent toutes du même point : de F', par exemple, si l'on prend l'équation

$$z' = A + \frac{cx}{A};$$

et de F, si l'on emploie la seconde

$$z = A - \frac{cx}{A}.$$

Dans le premier cas, en nommant x' une nouvelle abscisse telle que $F'P$, on aura

$$x' = c + x;$$

ce qui donne

$$z' = A + c\,\frac{(x' - c)}{A}.$$

Dans le second cas, si l'on nomme x' une nouvelle abscisse telle que FP, on aura

$$x' = x - c;$$

ce qui donne

$$z = A - c\,\frac{(x' + c)}{A}.$$

Les x' positifs de la première de ces suppositions donnent pour z' les mêmes valeurs que les x' négatifs de la seconde, et réciproquement, parce que la courbe étant symétrique de part et d'autre de l'axe des y, les points qui correspondent à des abscisses égales et de signes contraires, sont situés à des distances égales des foyers opposés.

156. Lorsque les lignes variables auxquelles une courbe est rapportée partent toutes d'un même point, comme dans le cas actuel, on leur donne le nom de *Coordonnées polaires* : l'équation polaire de l'ellipse est donc, en plaçant l'origine au foyer F,

$$z = A - c\,\frac{(x+c)}{A}.$$

On peut lui donner une forme très-élégante, en introduisant au lieu de x l'angle formé par le rayon z avec l'axe. Soit v cet angle, on aura évidemment

$$x = z \cos v.$$

Si, de plus, on fait

$$c = Ae,$$

e sera le rapport de l'excentricité au demi grand axe, et, par la substitution de ces valeurs, l'équation de l'ellipse devient

$$z = A - e(z \cos v + Ae);$$

ou, en tirant la valeur de z,

$$z = \frac{A(1-e^2)}{1 + e \cos v}.$$

La quantité $A(1-e^2)$ est égale à $A\left\{1 - \frac{A^2 - B^2}{A^2}\right\}$, ou à $\frac{B^2}{A}$; c'est le demi-paramètre de l'ellipse, et la distance z se nomme *Rayon vecteur*. Cette forme est fréquemment employée dans l'astronomie.

157. Pour ne rien omettre de ce qui peut intéresser relativement aux propriétés de l'ellipse, je vais donner ici la mesure de sa surface, quoique cette recherche nous

écarte un peu du but analytique que nous nous sommes proposé.

Nous avons vu que si du centre de l'ellipse, avec un rayon égal au demi grand axe, on décrit une circonférence de cercle, et qu'on nomme y, Y, les ordonnées correspondantes de ces deux courbes, on a toujours

$$y = \frac{B}{A} Y, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{Y} = \frac{B}{A}.$$

Les aires de l'ellipse et du cercle sont aussi dans le même rapport.

Pour le faire voir, inscrivons à la circonférence $BMM'B'$ un polygone quelconque, et de chacun de ses angles, menons des perpendiculaires à l'axe BB' (fig. 55) : en joignant les points où ces droites rencontrent l'ellipse, on formera un polygone intérieur à cette courbe ; un quelconque des trapèzes $PNP'N'$ de ce polygone aura pour mesure

$$\frac{(PN + P'N')}{2} PP', \quad \text{ou} \quad (x - x') \frac{(y + y')}{2}.$$

Le trapèze correspondant $PMP'M'$ dans le cercle, aura pour mesure

$$\frac{(PM + P'M')}{2} PP', \quad \text{ou} \quad (x - x') \frac{(Y + Y')}{2}.$$

Ces trapèzes seront donc entre eux dans le rapport constant de B à A. Les surfaces des polygones inscrits dans les deux courbes seront aussi dans le même rapport ; et, comme cela a lieu, quel que soit le nombre des côtés de ces polygones, ce rapport sera encore celui de leurs limites ; d'où il suit qu'en désignant par e et E les aires de l'ellipse et du cercle, on aura

$$\frac{e}{E} = \frac{B}{A};$$

c'est-à-dire que l'aire de l'ellipse est à celle du cercle circonscrit comme le second axe est au premier.

En désignant par π la demi-circonférence dont le rayon égale 1, πA^2 sera l'aire du cercle décrit sur le grand axe. On aura donc, pour l'aire de l'ellipse, l'expression suivante

$$e = \pi . AB;$$

et les aires de deux ellipses quelconques seront entre elles dans le rapport des rectangles construits sur leurs axes. On parviendrait au même résultat, en considérant la circonférence décrite sur le second axe.

La même démonstration pourrait s'appliquer à deux courbes quelconques dont les ordonnées, correspondantes aux mêmes abscisses, auraient entre elles un rapport constant; et il en résulte que ce rapport serait aussi celui de leurs aires entre les mêmes limites.

DE LA PARABOLE.

158. En coupant un cône droit, dont l'angle au centre était de 100°, par un plan parallèle à une de ses génératrices, nous avons eu pour l'équation de l'intersection

$$y^2 + 2z'x = 0,$$

les coordonnées x et y étant perpendiculaires entre elles, et z' une quantité positive : nous avons dit que cette courbe s'appelle une *Parabole*.

Pour avoir les points où elle coupe l'axe des x (fig. 56),

faisons $y = 0$, il viendra

$$x = 0;$$

c'est-à-dire que cela a lieu dans un seul point, qui est l'origine des coordonnées.

En faisant $x = 0$, on aura les points où elle rencontre l'axe des y. Cette supposition donne

$$y^2 = 0;$$

c'est-à-dire que cela n'a lieu qu'à l'origine.

Ainsi la courbe n'a qu'un point de commun avec les axes des x et des y : ce point est l'origine des coordonnées, et l'on voit qu'elle y est touchée par l'axe des y'.

En résolvant son équation par rapport à y, il vient

$$y = \pm \sqrt{-2z'x}.$$

Ces deux valeurs étant égales et de signes contraires, la courbe est symétrique au-dessus et au-dessous de l'axe des x.

x positif donne toujours y imaginaire, puisque z' est une quantité positive : la courbe ne s'étend donc pas du côté des abscisses positives, et elle est limitée, dans ce sens, par l'axe des y.

x devenant négatif, on a

$$y = \pm \sqrt{2z'x}.$$

Alors les valeurs de y sont toujours réelles, et d'autant plus grandes que x est plus grand. La courbe s'étend donc indéfiniment de ce côté de l'axe des x, et elle a la forme représentée fig. 56.

Puisqu'il n'y a d'ordonnées réelles que du côté des abscisses négatives, nous prendrons celles-ci pour les positives, et nous aurons

$$y^2 = 2z'x.$$

Le rapport du carré de l'ordonnée à l'abscisse étant, d'après l'équation précédente, la même pour tous les points de la courbe, il s'ensuit que, *dans la parabole, les carrés des ordonnées sont entre eux comme les abscisses correspondantes.*

159. La ligne indéfinie AX se nomme l'*Axe* de la parabole; le point A en est le *Sommet*.

Le coefficient constant $2z'$ s'appelle le *Paramètre*. Si l'on se reporte au n°. 97 et à la fig. 35, on verra que z' était la distance du centre du cône au plan des xy, qui était le plan coupant; et, comme l'angle au centre du cône était de 100°, et qu'une de ses génératrices coïncidait avec l'axe des z, son axe faisait avec le plan des xy un angle de 50°: par conséquent, la distance de l'origine des coordonnées au pied de l'axe était aussi z'; on voit que, dans la parabole, comme dans l'ellipse, le paramètre est double de cette distance (n°. 114)

160. Pour éviter les accens, nous écrirons dorénavant p au lieu de z' dans l'équation de la parabole, qui sera ainsi

$$y^2 = 2px.$$

Cette courbe ne s'étendant que d'un côté de l'axe des y, aucune droite menée perpendiculairement à son axe ne peut diviser en deux parties égales les droites parallèles à ce dernier, et terminées à la courbe. Il n'en est donc pas ici comme dans l'ellipse, qui avait deux axes doués de cette propriété; la parabole n'en a qu'un seul. En se rappelant la marche que nous avons suivie dans l'art. 107, relativement à l'ellipse, on prouvera aisément que la quantité $y^2 - 2px$ est positive hors de la parabole, nulle sur cette courbe, et négative dans son intérieur.

161. On peut décrire très-simplement la parabole de la

manière suivante (fig. 57) On portera sur l'axe des x, et à partir de l'origine, une distance AB égale à $2p$; ou au paramètre de la parabole. D'un point quelconque C, pris sur le même axe pour centre, et d'un rayon égal à CB, on décrira une circonférence de cercle. Du point P, extrémité de son diamètre, on élevera la perpendiculaire PM; et, menant par le point Q la parallèle QM à l'axe des x, le point M sera à la parabole.

Car, par cette construction, $PM = AQ$, et....... $AQ^2 = AB.AP$, d'où $PM^2 = 2p.AP$.

162. On a vu, en traitant des sections du cône, que la parabole n'est qu'une ellipse infiniment alongée. Comme cette analogie peut nous être fort utile pour prévoir avec facilité les propriétés de cette courbe, il importe de la vérifier.

Considérons donc une ellipse dont les axes soient $2A$, $2B$ (fig. 58); l'origine étant au sommet, son équation sera

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(2Ax - x^2).$$

La distance du centre de l'ellipse au foyer F est $\sqrt{A^2 - B^2}$; en la retranchant de A, on a la distance AF, dont l'expression est

$$AF = A - \sqrt{A^2 - B^2}.$$

C'est la distance du foyer au sommet de la courbe. Introduisons cette quantité comme une constante égale à $\frac{p}{2}$, il viendra

$$A^2 - B^2 = \left\{A - \frac{p}{2}\right\}^2;$$

d'où l'on tire

$$B^2 = Ap - \frac{p^2}{4}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation de l'ellipse, elle devient

$$y^2 = \frac{\left\{Ap - \frac{p^2}{4}\right\}}{A^2}(2Ax - x^2);$$

ou, en développant,

$$y^2 = 2px - \frac{1}{A}\left\{x^2p + \frac{p^2x}{2}\right\} + \frac{p^2x^2}{4A^2}.$$

Si, dans cette équation, nous donnons successivement à A différentes valeurs, p restant toujours le même, nous aurons une suite d'ellipses dont les grands axes seront différens, mais qui auront la même position du foyer F et la même distance du foyer au sommet de la courbe. Or, en augmentant ainsi le grand axe, l'ellipse s'alonge de plus en plus, sans que les ordonnées de ses différens points augmentent dans le même rapport. En effet, considérons un de ces points dont l'abscisse soit x, x étant une quantité finie, et voyons quels sont les changemens de l'ordonnée correspondante. A mesure que A augmente, x restant le même, les termes qui se trouvent divisés par A et par A^2, dans la valeur de y^2, diminuent; enfin, lorsque l'on suppose A infini, ces termes deviennent plus petits que toute quantité donnée, et la valeur de y^2 se réduit à son premier terme, qui est indépendant de A: on a donc alors

$$y^2 = 2px,$$

équation d'une parabole. Les ordonnées de cette parabole approchent donc de plus en plus d'être égales à celles des ellipses, à mesure que A augmente; et l'on peut prendre A si grand, que la différence soit moindre que toute quantité quelconque donnée.

163. D'après cela, il devient naturel de penser que le

foyer commun de toutes ces ellipses jouit dans la parabole, de quelques propriétés analogues, autant toutefois que peut le permettre la correspondance de leur forme : c'est ce que le calcul va confirmer, comme on le verra tout-à-l'heure. Aussi ce point se nomme-t-il le *Foyer de la parabole*; sa distance au sommet de la courbe est $\frac{p}{2}$, c'est-à-dire qu'elle est égale au quart du paramètre.

164. En cherchant les propriétés de ce point, il est visible qu'il ne faut s'attacher qu'à celles qui sont compatibles avec les modifications que les ellipses subissent pour dégénérer en paraboles. Par exemple, on ne doit plus chercher la propriété relative à la somme des distances, puisque le second foyer se trouve éloigné indéfiniment; mais on peut se proposer de voir si la distance du foyer aux points de la courbe est encore exprimée, en fonction de l'abscisse, d'une manière rationnelle. Or, il est facile de s'en assurer; car FM étant cette distance (fig. 39), on a

$$\overline{FM}^2 = y^2 + \left\{x - \frac{p}{2}\right\}^2 = 2px + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = \left\{x + \frac{p}{x}\right\}^2,$$

d'où l'on tire

$$FM = x + \frac{p}{2}.$$

La distance d'un point quelconque de la parabole au foyer est donc égale à l'abscisse de ce point, augmentée de la distance du foyer au sommet de la courbe. Par conséquent, tous les points de la parabole sont à égale distance du foyer et d'une ligne BL menée parallèlement à l'axe des y, à une distance $\frac{p}{2}$ du sommet : cette droite se nomme la *Directrice*.

De là résulte un second moyen de décrire une parabole dont le paramètre est connu.

De part et d'autre du point A, on portera sur l'axe AX les longueurs AB, AF, égales entre elles et au quart du paramètre de la parabole : le point F en sera le foyer (fig. 59). Par un point quelconque P de l'axe, on élevera une perpendiculaire indéfinie PM; puis, prenant la distance BP, du point F, comme centre avec cette distance pour rayon, on décrira un arc de cercle qui coupera la droite PM en deux points M, m : ces points seront à la parabole.

En effet, d'après cette construction, on a

$$FM = AP + AB = x + \frac{p}{2}.$$

On peut aussi, d'après la même propriété (fig. 60), décrire une parabole par un mouvement continu.

Pour cela, on placera contre la directrice BL une équerre mobile EQR : puis, prenant un fil d'une longueur égale à QE, on fixera une de ses extrémités en E, et l'autre en F, au foyer de la parabole ; on tendra ensuite le fil par le moyen d'un style qu'on appliquera contre la ligne QE ; faisant glisser l'équerre le long de la directrice, le style glissera le long de QE, et décrira la parabole.

En effet, on aura toujours

$$FM + ME = QM + ME \quad \text{ou} \quad QM = MF.$$

165. Il est également facile de s'assurer que la double ordonnée qui passe par le foyer de la parabole est égale à $2p$, c'est-à-dire au paramètre.

166. Cherchons maintenant à mener une tangente à la parabole, dont l'équation est

$$y^2 = 2px.$$

Soient x'', y'', les coordonnées du point de tangence qui est supposé donné, on aura

$$y''^2 = 2px'';$$

et, la tangente devant passer par ce point, son équation sera de cette forme

$$y - y'' = a(x - x'').$$

Il s'agit de déterminer a.

Cherchons les points où cette droite, considérée comme sécante, rencontre la courbe. Pour ces points, les trois équations précédentes doivent subsister en même tems. Retranchant les deux premières l'une de l'autre, il vient

$$(y - y'')(y + y'') = 2p(x - x'').$$

Mettant pour y sa valeur tirée de l'équation de la droite, le résultat est

$$\{2ay'' + a^2(x - x'') - 2p\}(x - x'') = 0.$$

Cette équation est satisfaite quand $x - x'' = 0$, parce que le point qui a pour coordonnées x'', y'', est une des intersections de la droite avec la courbe : supprimant ce facteur, il reste

$$2ay'' + a^2(x - x'') - 2p = 0.$$

Les deux intersections de la tangente avec la courbe devant se confondre en une seule, la seconde valeur de x doit encore être x'', comme la première. L'équation précédente doit donc être satisfaite quand $x = x''$, et $y = y''$; ce qui exige qu'on ait

$$a = \frac{p}{y''};$$

et l'équation de la tangente devient

$$y - y'' = \frac{p}{y''}(x - x'').$$

En faisant disparaître le dénominateur y'', et observant que

$$y''^2 = 2px'',$$

on peut lui donner cette forme

$$yy'' = p(x + x'').$$

Si l'on double cette équation, et qu'on la retranche de la précédente, on trouve

$$y''^2 - 2yy'' = -2px;$$

ou, en ajoutant de part et d'autre y^2,

$$(y - y'')^2 = y^2 - 2px.$$

La quantité $y^2 - 2px$ est donc constamment positive pour tous les points de la tangente, excepté pour celui dont l'ordonnée est y''. Tous ces points, excepté celui de tangence, sont donc extérieurs à la parabole.

167. A l'aide de ces formules, on peut mener une tangente à la parabole par un point quelconque dont les coordonnées seraient x', y', et qui ne serait pas pris sur cette courbe.

Car, ce point devant être sur la tangente, il faudrait qu'il satisfît à son équation ; ce qui donnerait

$$y'y'' = p(x' - x'');$$

et en y joignant la relation

$$y''^2 = 2px'',$$

on pourrait, au moyen de ces deux équations, déterminer les inconnues x'', y'', c'est-à-dire, les coordonnées du point de tangence, qui seraient en général du second degré; et,

en les substituant dans l'équation de la tangente, celle-ci se trouverait déterminée, et passerait par le point donné. L'élimination de x'' entre les deux équations précédentes donne

$$y''^2 - 2y'y'' = -2px'.$$

y'' aura donc en général deux valeurs, qui seront réelles, si la quantité

$$y'^2 - 2px'$$

est positive. Cette condition sera satisfaite toutes les fois que le point donné sera extérieur à la parabole; et l'on pourra alors mener deux tangentes. Si le point est sur la parabole même, il n'y en aura qu'une seule; enfin, s'il lui est intérieur, il n'y en aura plus du tout, et le problême sera impossible.

168. Pour avoir le point où la tangente rencontre l'axe des x, il faut faire $y = 0$, dans l'équation

$$yy'' = p(x + x''),$$

ce qui donne

$$x = -x''.$$

C'est la valeur de AT (fig. 61) : en lui ajoutant l'abscisse AP, abstraction faite du signe, nous aurons la soutangente

$$PT = 2x'';$$

c'est-à-dire que, *dans la parabole, la soutangente est double de l'abscisse.* Ce qui fournit un procédé très-simple pour mener une tangente à cette courbe.

169. La valeur de PT étant susceptible de croître indéfiniment, le point T s'éloigne de plus en plus du sommet de la courbe, à mesure que x'' augmente.

Si l'on voulait tenir compte du signe de AT quand on cherche la valeur de la soutangente PT, il semble, au

premier coup-d'œil, que l'on aurait

$$PT = AT + AP = -x'' + x'' = 0 ;$$

ce qui donnerait la soutangente constamment égale à zéro, résultat absurde : mais ce n'est là qu'une erreur de signe qui vient de ce qu'en ajoutant AP à AT dans la figure, pour avoir PT, on ne tient pas compte de la position de ces lignes par rapport à l'origine commune, tandis que, dans l'expression analytique, cette position est observée. Cette contradiction cesse lorsque l'on fait abstraction du signe — dans la quantité $-x''$, qui exprime la valeur analytique de AT, eu égard à sa situation par rapport à l'origine des coordonnées ; et voilà pourquoi on parvient ainsi au résultat véritable.

Ces modifications, qu'il faut quelquefois faire subir aux expressions analytiques, pour en déduire les valeurs absolues des quantités géométriques, ne tiennent pas, comme on vient de le voir, à une imperfection de l'analyse ; elles sont, au contraire, une suite nécessaire de sa grande généralité ; car, l'analyse donnant à-la-fois les valeurs absolues et leurs positions relatives qui sont indiquées par les signes + et —, il faut la dépouiller de cette propriété, et faire abstraction de ces signes, quand on veut combiner les valeurs absolues des quantités indépendamment de leur situation par rapport à l'origine commune.

170. Occupons-nous maintenant de mener une normale à la parabole. Cette normale étant une ligne droite, et devant passer par le point de tangence, son équation sera de la forme

$$y - y'' = a' (x - x'').$$

Mais, de plus, elle doit être perpendiculaire à la tangente, pour laquelle on a

$$a = \frac{p}{y''}.$$

Il faut donc qu'il existe entre a et a' la relation

$$aa' + 1 = 0,$$

qui donne

$$a' = -\frac{y''}{p}.$$

Alors l'équation de la normale devient

$$y - y'' = -\frac{y''}{p}(x - x'').$$

En y faisant y nul, et prenant la valeur de $x - x''$, on aura la sounormale, qui sera

$$x - x'' = p;$$

d'où l'on voit que, *dans la parabole, la sounormale est constante et égale à la moitié du paramètre.* Cette propriété fournit encore un autre moyen de mener une tangente à cette courbe.

171. Les directions de la tangente et de la normale ont dans la parabole, comme dans l'ellipse, des rapports remarquables avec celles des lignes menées du foyer au point de tangence : nous allons examiner ces analogies. Pour cela, du foyer F, où $y = 0$, et $x = \frac{p}{2}$ (fig. 61), menons une ligne droite qui passe par le point de tangence, son équation sera de cette forme

$$y - y'' = \alpha (x - x'');$$

et la condition de passer par le foyer donnera

$$\alpha = \frac{-y''}{\frac{p}{2} - x''}.$$

L'angle *FMT*, que cette droite fait avec la tangente à la parabole, a pour tangente trigonométrique

$$\frac{\alpha - a}{1 + a\alpha}.$$

En substituant, dans cette expression, pour a sa valeur qui est $\frac{p}{y''}$, et pour α celle que nous venons de trouver, observant de plus, que

$$y''^2 = 2px'',$$

elle se réduit à $\frac{p}{y''}$, ou à a; d'où il suit que, *dans la parabole, l'angle formé par la tangente avec une droite menée du foyer au point de tangence est égal à l'angle de la tangente avec l'axe.*

Si, par le point de tangence M, on mène une droite MF' parallèle à l'axe, la tangente fera avec cette droite le même angle qu'avec l'axe ; d'où il suit que, *dans la parabole, les droites menées du point de tangence au foyer, et parallèlement à l'axe, font avec la tangente des angles égaux*, propriété qui devait naturellement résulter de ce que la parabole est une ellipse dont le grand axe est infini, et dont les foyers sont par conséquent infiniment éloignés l'un de l'autre.

172. De là résulte un moyen très-simple de mener une tangente à la parabole par un point extérieur.

Soient G le point donné, F le foyer de la parabole, BL sa directrice (fig. 61). Du point G comme centre, avec un rayon égal à GF, on décrira une circonférence de cercle qui coupera la directrice en L. Du point L, on mènera LM parallèle à l'axe; M sera le point de tangence, et GM la tangente demandée.

Car, par la nature de la parabole, $ML = MF$; par construction, $GF = GL$: donc l'angle LMG, ou son opposé tMF', égale l'angle GMF : donc la droite MG est tangente au point M.

Si l'on avait seulement besoin de la direction de la tangente, et que le point M dût être très-éloigné, il serait plus commode de mener, du point donné G à la droite FL, une perpendiculaire GT; ce serait la tangente demandée.

Si l'on rapproche cette méthode de celle que nous avons donnée (n°. 136) pour mener une tangente à l'ellipse par un point extérieur, on verra qu'elles ne diffèrent l'une de l'autre qu'en ce que, dans la parabole, le second foyer doit être considéré comme infiniment éloigné du premier; ce qui rend parallèles à l'axe les lignes qui lui sont menées. La distance AB du sommet de la parabole à la directrice BL n'est autre chose que la différence des lignes $F'B$, $F'A$ de l'ellipse (fig. 58), la première étant égale au grand axe AA'; et voilà pourquoi $AB = AF$. La directrice BL représente donc, dans la parabole, la circonférence de cercle décrite dans l'ellipse du point F', comme centre, avec le grand axe pour rayon, circonférence qui devient une ligne droite quand le point F' est infiniment éloigné : alors le point L (fig. 61), où la circonférence décrite du point G, comme centre, avec GF pour rayon, rencontre la directrice BL, répond au point dans lequel cette même circonférence coupait la précédente dans l'ellipse; et la ligne droite, menée par le point L parallèlement à l'axe, répond à celle que, dans l'ellipse, on mène au second foyer F' (fig. 58).

De la Parabole rapportée à ses diamètres.

173. Nous allons maintenant chercher les systêmes de coordonnées obliques, relativement auxquels l'équation de la parabole conserve la même forme que lorsqu'elle est rapportée à son axe. Pour cela, il faut reprendre les formules générales

$$x=a+x'\cos\alpha+y'\cos\alpha',\quad y=b+x'\sin\alpha+y'\sin\alpha';$$

car il ne suffirait pas, comme on le verra tout-à-l'heure, de changer la direction des coordonnées sans déplacer l'origine. Ces valeurs étant substituées dans l'équation

$$y^2=2px,$$

elle devient

$$\left.\begin{array}{l} y'^2\sin^2\alpha'+2x'y'\sin\alpha\sin\alpha'+x'^2\sin^2\alpha+b^2-2ap \\ +2(b\sin\alpha'-p\cos\alpha')y'+2(b\sin\alpha-p\cos\alpha)x' \end{array}\right\}=0.$$

Pour qu'elle conserve la forme qu'elle avait d'abord, il faut qu'on ait

$$\sin\alpha'\sin\alpha=0,\quad \sin^2\alpha=0,\quad b\sin\alpha'-p\cos\alpha'=0,\quad b^2-2ap=0;$$

elle se réduit alors à

$$y'^2=\frac{2p}{\sin^2\alpha'}\cdot x'.$$

La seconde des équations précédentes nous apprend que $\sin\alpha=0$, c'est-à-dire que l'axe des x' est parallèle à l'axe des x. *Tous les diamètres de la parabole sont donc parallèles à son axe.*

Les deux autres équations donnent

$$b^2=2ap\qquad \text{tang}\,\alpha'=\frac{p}{b}.$$

La première (fig. 61 *bis*) montre que les coordonnées a et b de la nouvelle origine A' satisfont à l'équation de la parabole. Cette origine est donc elle-même un point de la courbe.

La seconde détermine l'inclinaison de l'axe des y' relativement à l'axe des x; elle fait voir que cet axe est tangent à la parabole au point A'.

Pour plus de simplicité, nous supprimerons les accens des variables x' et y', en nous rappelant toutefois qu'elles représentent des coordonnées obliques : nous ferons, de plus, $\frac{p}{\sin^2 \alpha'} = p'$; $2p'$ sera le paramètre du diamètre auquel la courbe est rapportée, et l'on aura

$$y^2 = 2p'x.$$

174. Les deux valeurs de y, pour la même abscisse, étant égales et de signes contraires, chaque diamètre divise les ordonnées qui lui correspondent en deux parties égales.

175. La valeur précédente de tang α' donne

$$\sin^2 \alpha' = \frac{p^2}{p^2 + b^2} = \frac{p}{2a + p}.$$

En substituant ce résultat dans l'expression de p', on trouve

$$p' = 2a + p,$$

ou

$$2p' = 4\left\{a + \frac{p}{2}\right\}.$$

Or, on a vu, dans l'article 164, que $a + \frac{p}{2}$ est la distance du foyer de la parabole au point de la courbe dont l'abscisse est égale à a. Ainsi, *dans la parabole, le paramètre d'un diamètre quelconque est quadruple de la distance du foyer à l'origine de ce diamètre.* Cette propriété subsiste également pour l'axe.

176. L'équation de la parabole étant de la même forme par rapport à ses diamètres que par rapport à son axe, les propriétés indépendantes de l'inclinaison des coordonnées seront communes dans les différens systêmes.

Ainsi, pour décrire une parabole lorsque l'on connaît le paramètre d'un de ses diamètres, et l'inclinaison des ordonnées correspondantes, on décrira une autre parabole sur ce diamètre pour axe avec le paramètre donné, et ensuite on inclinera convenablement les ordonnées de cette courbe, sans changer leur longueur.

177. Si x'', y'' sont les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, on aura

$$y''^2 = 2\,p'\,x'';$$

et l'équation de la tangente à ce point sera de cette forme

$$y - y'' = a\,(x - x'').$$

Le systême de ces formules est le même que dans l'article 166; et comme il faut les combiner de la même manière, on en déduira un résultat analogue, qui sera

$$a = \frac{p'}{y''}, \qquad \text{ou} \qquad a = \frac{y''}{2\,x''};$$

et l'équation de la tangente deviendra

$$yy'' = p'\,(x + x'').$$

Elle aura donc la même forme que lorsque la courbe est rapportée à son axe. Il en sera de même de l'expression de la soutangente; et l'on en déduira, comme dans le n°. 168, qu'*elle est double dans l'abscisse correspondante.*

Il suit de là que pour mener, par un point donné M de la parabole (fig. 61 *ter*), une tangente à cette courbe, il faut construire l'ordonnée PM au diamètre AX, prendre

$A'T = A'P$, et mener MT' qui sera la tangente demandée.

En prenant une marche inverse de celle que nous avons suivie, il serait facile de rapporter la parabole à son axe lorsqu'elle est rapportée à son diamètre. Celà n'a aucune difficulté, et nous ne nous y arrêterons point.

Sur l'Équation polaire de la Parabole, et sur la Mesure de sa surface.

178. Jusqu'à présent, nous avons tiré de la seule équation de la parabole les propriétés qui la caractérisent : réciproquement, ces propriétés nous conduiraient à l'équation de cette courbe.

Proposons-nous, par exemple, de trouver une courbe telle que les distances de chacun de ses points à une droite et à un point donné soient égales entre elles.

Soient F le point donné, BL la droite donnée (fig. 62). Prenons pour axe des abscisses la ligne FB perpendiculaire à BL, et plaçons l'origine au point A, milieu de BF, que nous ferons égal à p; les ordonnées seront parallèles à la droite BL.

Pour chaque point M qui appartiendra à la courbe cherchée, nous aurons, en nommant z la ligne FM,

$$z^2 = y^2 + \left\{x - \frac{p}{2}\right\}^2, \qquad z = x + \frac{p}{2}.$$

Eliminant z, il viendra

$$y^2 = 2px,$$

équation à la parabole.

Cette courbe était également caractérisée par l'équation

$$z = x + \frac{p}{2};$$

car les distances z, étant variables en même tems que l'abscisse x, peuvent convenir successivement à tous ses points, et se détermineront pour chacun d'eux dès que x sera connu. Ces distances se nomment des *Rayons Vecteurs*.

179. Si nous transportons l'origine des x au foyer F, pour lequel

$$y = 0, \qquad x = \frac{p}{2},$$

il faudra en nommant x' les nouvelles abscisses, qu'on ait

$$x = x' + \frac{p}{2};$$

valeur qui, étant substituée pour x, donne, en supprimant les accens,

$$z = x + p.$$

180. Si l'on introduit, au lieu de l'abscisse x, l'angle AFM que forme le rayon vecteur avec l'axe, on aura

$$x = -z \cos v;$$

et l'équation précédente devient

$$z = p - z \cos v;$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{p}{1 + \cos v}.$$

C'est l'équation polaire de la parabole. On peut la déduire facilement de l'équation polaire de l'ellipse, qui est

$$z = \frac{A\,(1 - e^2)}{1 + e \cos v}.$$

Il suffit de faire

$$p = A(1 - e^2),$$

et de supposer ensuite A infini, et $e = 1$, ce qui alonge l'ellipse indéfiniment. En effet, on a vu, dans l'art. 156, que la quantité $A(1 - e^2)$ est égale au demi-paramètre de l'ellipse.

181. Quoique l'aire totale, comprise entre les branches de la parabole, soit indéfinie, on peut cependant évaluer d'une manière algébrique une portion quelconque de cette aire comprise entre des limites données.

Considérons en effet le segment parabolique APM (fig. 63) terminé par l'axe AX et par l'ordonnée PM ou y. Si l'on mène les droites MQ, AQ, la première parallèle, la seconde perpendiculaire à l'axe, on formera le rectangle $APQM$, dans lequel l'aire du segment parabolique APM se trouvera comprise, et cette aire sera égale aux deux tiers du rectangle, comme nous allons le démontrer.

Pour cela, concevons un polygone rectiligne quelconque $MM'M''$... inscrit à la parabole, des sommets de ce polygone, menons des parallèles aux lignes AP et PM; elles représenteront les abscisses et les ordonnées de ces sommets : ces lignes, prolongées, formeront les rectangles $PP'pM'$, $P'P''p'M''$... qui seront intérieurs à la parabole, et les rectangles $QQ'qM'$, $Q'Q''q'M''$... qui lui seront extérieurs. En représentant les premiers par P, P', P''..., les derniers par p, p', p''..., on aura

$$P = y'(x - x'), \quad p = x'(y - y');$$

ce qui donne

$$\frac{P}{p} = \frac{y'(x - x')}{x'(y - y')};$$

Or les points MM'... appartiennent à la parabole : ainsi on a

$$y^2 = 2px, \quad y'^2 = 2px';$$

ce qui donne

$$x - x' = \frac{y^2 - y'^2}{2p}, \quad x' = \frac{y'^2}{2p};$$

en substituant ces valeurs, le rapport de P à p devient

$$\frac{P}{p} = \frac{y'(y^2 - y'^2)}{y'^2(y - y')} = \frac{y + y'}{y'}.$$

Les mêmes raisonnemens pouvant s'appliquer successivement à tous les côtés du polygone, on aura cette suite d'équations

$$\frac{P}{p} = \frac{y + y'}{y'},$$

$$\frac{P'}{p'} = \frac{y' + y''}{y''},$$

$$\frac{P''}{p''} = \frac{y'' + y'''}{y'''}, \text{ etc.....}$$

Le polygone $MM'M''$... étant absolument arbitraire, on peut espacer ses sommets de manière qu'en désignant par ω une constante quelconque prise à volonté, on ait toujours

$$y - y' = \omega y',$$

$$y' - y'' = \omega y'',$$

$$y'' - y''' = \omega y''',$$

et ainsi de suite : cela revient à faire décroître y, y', y''...., suivant une progression géométrique. D'après cette supposition très-permise, les rapports précédens deviennent

$$\frac{P}{p} = 2 + \omega,$$

$$\frac{P'}{p'} = 2 + \omega,$$

$$\frac{P''}{p''} = 2 + \omega, .$$

c'est-à-dire qu'ils seront tous égaux entre eux, quelle que soit la valeur de ω : on aura donc ainsi, en comparant ces rapports,

$$\frac{P + P' + P'' + \dots \text{ etc.}}{p + p' + p'' + \dots \text{ etc.}} = 2 + \omega.$$

Le numérateur du premier membre est la somme des rectangles inscrits à la parabole; le dénominateur est la somme des rectangles circonscrits. A mesure que ω diminue, le rapport de ces quantités approche de plus en plus d'être égal à 2; et l'on peut prendre ω si petit, que la différence soit moindre que toute quantité donnée : mais en même tems, la somme des rectangles approche de plus en plus d'être égale aux segmens curvilignes inscrits et circonscrits à la parabole. Par conséquent la limite de leur rapport est égale au rapport de ces segmens; et, en représentant le premier par S, le second par s, on a

$$\frac{S}{s} = 2;$$

ce qui donne

$$\frac{S + s}{s} = 3,$$

et, en divisant ces équations membre à membre,

$$S = \frac{2}{3}(S + s).$$

$S+s$ est la somme des ségmens inscrits et circonscrits à la parabole : c'est par conséquent la surface du rectangle *APMQ*. *Ainsi l'aire du segment parabolique APM est les deux tiers du rectangle construit sur l'abscisse AP et l'ordonnée PM.*

182. Les courbes, qui sont telles que l'on peut assigner ainsi algébriquement la valeur d'une portion quelconque de leur aire, se nomment *courbes quarrables*. On voit que la parabole est de ce nombre. Il n'en est pas de même de l'ellipse, dont l'aire renferme l'expression de la circonférence du cercle.

DE L'HYPERBOLE.

183. En coupant un cône droit, dont l'angle au centre était plus grand que 100°, par un plan incliné à son axe, de manière à rencontrer les deux nappes de cette surface, nous avons eu pour l'équation de l'intersection,

$$y^2-x^2(a^2-1)+2az'x=0.$$

a étant plus grand que 1, et z' une quantité positive, nous avons dit que cette courbe se nomme une hyperbole.

Pour avoir les points où elle coupe l'axe des x, faisons $y=0$, il viendra

$$x^2(a^2-1)-2az'x=0;$$

ce qui donne pour x deux valeurs

$$x=0, \qquad x=\frac{2az'}{a^2-1};$$

c'est-à-dire que cela a lieu dans deux points différens,

dont l'un est l'origine même des coordonnées, et l'autre est situé du côté des abscisses positives, à une distance de cette origine égale à $\frac{2az'}{a^2-1}$.

En faisant $x=0$, on aura les points où la courbe coupe l'axe des y: cette supposition donne

$$y^2=0;$$

c'est-à-dire que cela n'a lieu que dans un seul point, qui est l'origine des coordonnées: mais, comme les deux ordonnées s'y réunissent, l'axe des y est tangent à la courbe.

Résolvons maintenant l'équation par rapport à y, nous aurons

$$y=\pm\sqrt{x^2(a^2-1)-2az'x}.$$

Les valeurs de y étant égales et de signe contraire, la courbe est symétrique au-dessus et au-dessous de l'axe des x.

Considérons le côté des x positifs.

Les valeurs de y seront réelles tant que l'on aura

$$x^2(a^2-1)>2az'x,$$

ou

$$x>\frac{2az'}{a^2-1}.$$

Mais elles seront imaginaires entre cette limite et l'origine des coordonnées; car, si l'on a

$$x<\frac{2az'}{a^2-1},$$

on aura aussi

$$(a^2-1)x^2<2az'x.$$

Ainsi, du côté des abscisses positives, la courbe n'a que des ordonnées imaginaires depuis l'origine des coordonnées jusqu'au point où elle coupe l'axe : au-delà de cette

limite, ses ordonnées sont toujours réelles, et d'autant plus grandes que x est plus grand.

Du côté des x négatifs, nous aurons

$$y = \pm \sqrt{x^2 (a^2 - 1) + 2az'x}.$$

L'ordonnée y est toujours réelle, et d'autant plus grande que x est plus grand. La courbe s'étend donc indéfiniment, de ce côté, au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses.

Il résulte de cette discussion que l'hyperbole est une courbe composée de deux parties séparées, telle que la représente la figure 64, où l'origine des coordonnées est supposée placée au point B'. Il était en effet facile de prévoir cette forme, d'après la disposition du plan coupant (fig. 36); l'intervalle BB', qui sépare les deux branches, est égal à $\frac{2az'}{a^2-1}$, et se nomme le premier ou le grand axe de l'hyperbole.

184. Transportons l'origine des coordonnées en A au milieu de l'axe BB'. Soit AP une nouvelle abscisse quelconque, que nous nommerons x', on aura

$$x' + \frac{az'}{a^2-1} = x.$$

Substituant cette valeur de x, il viendra

$$y^2 - (a^2-1)x'^2 + \frac{a^2z'^2}{a^2-1} = 0.$$

En faisant $y = 0$, on trouve

$$x' = \pm \frac{az'}{a^2-1},$$

comme cela devait être; mais, en faisant $x' = 0$, on trouve

pour y cette valeur imaginaire

$$y = \pm \frac{az'}{\sqrt{a^2 - 1}} \sqrt{-1},$$

parce que la courbe ne rencontre pas le nouvel axe des y. Ce qui n'empêche pas que l'équation de l'hyperbole ne prenne, comme celle de l'ellipse, une forme très-élégante lorsqu'on fait

$$A = \frac{az'}{a^2 - 1} \qquad B = \frac{az'}{\sqrt{a^2 - 1}};$$

car on en tire

$$a^2 - 1 = \frac{B^2}{A^2} \quad az' = \frac{B^2}{A} \quad \frac{a^2 z'^2}{a^2 - 1} = B^2;$$

ce qui donne, en supprimant les accens dont nous n'avons plus besoin,

$$A^2 y^2 - B^2 x^2 = - A^2 B^2.$$

Les quantités $2A$, $2B$, se nomment les axes de l'hyperbole, quoiqu'en effet cette courbe ne détermine réellement, par son intersection, que le premier d'entre eux. Le point A est le centre de la courbe, et $\frac{2B^2}{A}$ en est le paramètre ; c'est une troisième proportionnelle aux deux axes. Lorsque l'équation de l'hyperbole se trouve ramenée à cette forme, les coordonnées étant rectangulaires, on dit qu'elle est rapportée au centre et à ses axes. Toute ligne menée par le centre, et terminée à la courbe, se nomme diamètre ; et il résulte de la forme symétrique de l'hyperbole que les diamètres se trouvent divisés par le centre en deux parties égales.

185. L'équation de l'ellipse, rapportée aussi à ses axes et au centre, est

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

En la comparant à celle de l'hyperbole, on voit que, *pour passer de l'une à l'autre, il suffit de changer B en $B\sqrt{-1}$*, considération qui est en analyse de la plus grande utilité.

Ce que nous avons vu relativement à la marche des ordonnées dans les deux courbes est une suite de cette loi; car, si l'on rapporte au même centre et aux mêmes axes une ellipse et une hyperbole dont les axes coordonnés soient les mêmes, la première sera comprise dans les limites entre lesquelles l'autre devient imaginaire.

Lorsque les deux axes de l'hyperbole sont égaux entre eux, son équation devient

$$y^2 - x^2 = -A^2.$$

On dit alors qu'elle est *Equilatère*.

Lorsque les deux axes de l'ellipse sont égaux, son équation devient

$$y^2 + x^2 = A^2;$$

et elle se réduit à un cercle. L'hyperbole équilatère est donc entre les hyperboles ordinaires ce qu'est le cercle entre les ellipses.

186. Si par le point B', pour lequel $y = 0$, et $x = -A$ (fig. 65), on mène une ligne droite inclinée d'une manière quelconque, elle aura pour équation

$$y = a(x + A).$$

Si par le point B, pour lequel $y = 0$, et $x = +A$, on mène une ligne droite pareillement inclinée d'une manière quelconque, on aura pour équation

$$y = a'(x - A).$$

Pour que ces deux droites se coupent sur l'hyperbole, il faut que leurs équations puissent subsister en même tems, et avec celle de cette courbe. Or, en les multipliant membre à membre, elles donnent

$$y^2 = aa'(x^2 - A^2;$$

et, pour que ce résultat s'accorde avec l'équation de l'hyperbole, mise sous cette forme

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - A^2),$$

il faut qu'on ait

$$aa' = \frac{B^2}{A^2};$$

ce qui établit une relation constante entre les angles que forment avec le grand axe les lignes menées des deux sommets de la courbe à un de ses points. Il en résulte que ces angles ont toujours leurs tangentes trigonométriques de même signe.

Lorsque l'hyperbole est équilatère $A = B$, il vient alors

$$aa' = 1;$$

c'est-à-dire que, dans l'hyperbole équilatère, *les droites, menées du même point de la courbe aux extrémités du grand axe, font avec lui des angles aigus dont l'ouverture est dirigée dans le même sens, et dont la somme est égale à un angle droit.*

Les droites, menées de la même manière dans le cercle, font aussi avec l'axe des angles aigus dont la somme est égale à un droit; mais leurs ouvertures sont dirigées dans des sens contraires.

187. Si l'on introduit les expressions des axes $2A$ et $2B$ dans l'équation de l'hyperbole, telle que nous l'avons

considérée d'abord, l'origine étant au sommet, elle devient

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - 2Ax)$$

et peut se mettre sous la forme

$$y^2 = \frac{B^2}{A^2}(x - 2A)x.$$

x et $x - 2A$ sont les distances du pied de l'ordonnée PM aux sommets B' et B de la courbe (fig. 64). On voit donc, par cette équation, *que les carrés des ordonnées sont entre eux comme les produits de ces distances.*

188. En changeant les x en y, et les y en x, dans l'équation

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

elle devient

$$A^2x^2 - B^2y^2 = -A^2B^2,$$

ou

$$B^2y^2 - A^2x^2 = \quad A^2B^2,$$

Cette transformation n'influant que sur le choix des axes, l'équation précédente doit encore appartenir à la même hyperbole ; et l'on peut aisément le vérifier en la discutant. Mais, ici, la supposition de $x = 0$ donne y réelle ; et $y = 0$ donne x imaginaire, parce que la courbe rencontre le nouvel axe des ordonnées, et ne rencontre point l'axe des abscisses : elle est alors placée comme le représente la figure 65, son premier axe étant bb'. Dans cette situation, on dit qu'elle est rapportée à son second axe, parce que c'est sur celui-ci que les abscisses sont comptées. On voit qu'il n'en est pas de l'hyperbole comme de l'ellipse, dont l'équation garde la même forme, quel que soit celui de ses axes qu'on prenne pour axe des abscisses, et cela vient de ce que l'ellipse est symétrique par rapport à ses deux axes,

au lieu que l'hyperbole ne l'est pas relativement aux siens, puisqu'elle n'en rencontre qu'un seul.

189. L'analogie de ces deux courbes nous conduit naturellement à chercher s'il n'existe pas dans l'hyperbole des points correspondans aux foyers de l'ellipse. Pour les découvrir, rappelons-nous que leur abscisse avait pour valeur $\pm\sqrt{A^2-B^2}$: ce sera donc $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ pour l'hyperbole, en changeant B en $B\sqrt{-1}$. En effet, si l'on suppose, pour plus de simplicité,

$$c=\sqrt{A^2+B^2},$$

et qu'on prenne deux points F, F' sur l'axe (fig. 66), à cette distance du centre de l'hyperbole, on trouve

$$FM^2=y^2+(x-c)^2=\frac{B^2}{A^2}(x^2-A^2)+x^2-2cx+c^2;$$

d'où l'on tire

$$FM=\frac{cx}{A}-A.$$

On a de même

$$FM=\frac{cx}{A}+A;$$

c'est-à-dire *que les distances* FM, F'M, *sont exprimées en fonction de* x *d'une manière rationnelle.* En retranchant ces équations l'une de l'autre, on trouve

$$F'M-FM=2A;$$

c'est-à-dire *que la différence de ces distances est égale au premier axe de l'hyperbole.* A cause de ces propriétés, les points F, F' déterminés par la valeur précédente de c, se nomment les *Foyers* de l'hyperbole.

190. Pour trouver leur position géométriquement, on élevera à l'une des extrémités du premier axe une perpendiculaire BE égale à la moitié du second axe B. On mènera

l'hypothénuse AE; puis, du point A, comme centre avec cette ligne pour rayon, on décrira une circonférence de cercle qui coupera l'axe en deux points F, F'. Ce seront les foyers de l'hyperbole.

On prouvera facilement que *la double ordonnée qui passe par ces foyers est égale au paramètre de la courbe.*

191. Les propriétes précédentes fournissent, pour la description de l'hyperbole, un procédé analogue à celui que nous avons employé pour l'ellipse, dans l'art. 125.

Du foyer F, comme centre (fig. 67) avec un rayon quelconque BO, on décrira une circonférence de cercle. De l'autre foyer F', comme centre avec $B'O$ ou $BB' + BO$ pour rayon, on décrira une autre circonférence de cercle: les points où elle coupera la précédente appartiendront à l'hyperbole ; car, d'après cette construction, on aura toujours

$$F'M - FM = 2A.$$

En opérant de même de l'autre côté de l'origine, on aura la seconde branche de la courbe, et l'on peut appliquer ici les remarques que nous avons faites sur la construction de l'ellipse par le procédé analogue.

On peut aussi, d'après cette propriété, décrire l'hyperbole, comme l'ellipse, par un mouvement continu : pour cela, on fixe au foyer F' une règle $F'M$, qui peut tourner autour de ce point. A l'extrémité M et à l'autre foyer F est attaché un fil MF, tel que $F'M - FM$ soit égal au grand axe BB'; glissant ensuite un piquet le long du fil, on le force à s'appliquer toujours contre la règle qui tourne autour du point F'; et le piquet, par ce mouvement, décrit une portion de l'hyperbole demandée.

192. Occupons-nous maintenant de mener une tangente à l'hyperbole, dont l'équation est

$$A^2y^2 - B^2x^2 = - A^2B^2.$$

Soient x'', y'' les coordonnées du point de tangence; elles vérifieront la relation

$$A^2y''^2 - B^2x''^2 = -A^2B^2.$$

La tangente étant une ligne droite, et devant passer par ce point, son équation sera de cette forme

$$y - y'' = a\,(x - x'').$$

Il ne reste plus qu'à déterminer a.

Pour y parvenir, il faudra opérer sur ces trois équations comme sur celles de l'article 126, qui étaient relatives à l'ellipse; mais ces dernières sont les mêmes que les précédentes, en changeant B en $B\sqrt{-1}$. Le résultat sera donc aussi le même avec cette modification, et l'on aura

$$a = \frac{B^2}{A^2}\,\frac{x''}{y''}.$$

L'équation de la tangente sera

$$y - y'' = \frac{B^2}{A^2}\,\frac{x''}{y''}\,(x - x''),$$

ou, en réduisant,

$$A^2yy'' - B^2xx'' = -A^2B^2.$$

On prouvera facilement, comme dans l'art. 127, qu'elle est toute entière hors de la courbe. On aura de même, pour l'équation de la normale,

$$y - y'' = \frac{-A^2}{B^2}.\frac{y''}{x''}\,(x - x'').$$

193. La valeur de a devient infinie quand y'' est nulle, car $x'' = 0$ donnerait y'' imaginaire, et y'' infinie donnerait x'' infinie: ainsi, aux extrémités du premier axe de l'hyperbole, la tangente est parallèle aux ordonnées, et elle ne peut jamais devenir parallèle aux abscisses.

194. Si, par le centre et par le point de tangence, on mène une ligne droite, son équation sera de la forme

$$y' = a'x;$$

et la condition de passer par le point de tangence donnera

$$a' = \frac{y''}{x''}.$$

Cette valeur, étant multipliée par celle de a qui convient à la tangente, donne

$$aa' = \frac{B^2}{A^2};$$

et, en comparant ce résultat avec celui de l'article 128, on voit (fig. 68) que le point de tangence M est sur une hyperbole dont le premier axe est AT, et le rapport des axes $\frac{B}{A}$: d'où il suit que, pour mener une tangente à l'hyperbole par un point M donné sur cette courbe, il faut mener, de ce point au centre, le diamètre AM par l'extrémité B' du premier axe BB', mener la corde $B'N$ parallèle à AM; MT, parallèle à BN, sera la tangente demandée.

Il résulte de cette construction et de la forme symétrique de l'hyperbole, que les tangentes MT, mt, aux extrémités d'un même diamètre, sont parallèles entre elles. Si donc on mène, par le centre A, une parallèle à ces tangentes, elle ne rencontrera jamais la courbe : cependant, par analogie avec l'ellipse, on prend sur cette parallèle une quantité qui s'appelle le diamètre conjugué du diamètre AM, et qui se détermine comme on le verra plus bas. Ici, comme dans l'ellipse, l'angle EAM, formé par deux diamètres conjugués, est égal à l'angle $B'NB$ des deux cordes qui leur sont respectivement parallèles, et qui sont menées des deux extrémités du premier axe à un même point de la courbe.

195. En faisant $y = o$ dans l'équation de la tangente, on trouve

$$x = \frac{A^2}{x''}.$$

C'est la valeur de AT (fig. 69): en la retranchant de AP, on aura la soutangente

$$PT = \frac{x''^2 - A^2}{x''}.$$

On trouvera de même la sounormale

$$PN = \frac{B^2 x''}{A^2}.$$

196. Les formules précédentes peuvent encore servir pour mener des tangentes à l'hyperbole par un point extérieur; car, en représentant ses coordonnées par x', y', elles devront satisfaire à l'équation de la tangente; ce qui donnera

$$A^2 y' y'' - B^2 x' x'' = - A^2 B^2.$$

On aura, de plus,

$$A^2 y''^2 - B^2 x''^2 = - A^2 B^2;$$

puisque le point de tangence est sur la courbe. Ces deux équations suffisent pour déterminer les coordonnées x'', y'', qui seront en général doubles pour le même point; et il est facile de s'assurer que ces valeurs seront toujours réelles, lorsque le point donné sera hors de l'hyperbole (182).

197. L'extension indéfinie des branches de l'hyperbole introduit dans la direction de ses tangentes, une loi très-remarquable, qui lui est particulière. Pour la découvrir, reprenons l'équation

$$y = \frac{B^2}{A^2}(x^2 - A^2).$$

Les deux valeurs de y, qui en résultent, peuvent se mettre

sous la forme

$$y = \pm \frac{Bx}{A} \sqrt{1 - \frac{A^2}{x^2}}.$$

A mesure que x augmente, A restant le même, le terme $\frac{A^2}{x^2}$ diminue; et les valeurs de y approchent de plus en plus de se réduire à $\pm \frac{Bx}{A}$: on peut même, comme x est indéfini, le prendre assez grand pour que la différence soit plus petite que toute quantité quelconque donnée. Par conséquent, si l'on construit deux lignes droites, dont les équations soient

$$y = + \frac{Bx}{A}, \quad y = - \frac{Bx}{A},$$

ces droites seront les limites des deux branches supérieure et inférieure de l'hyperbole, qui s'en approchera sans cesse, sans pouvoir les atteindre; et c'est ce qu'il est bien facile de voir, car on aura toujours

$$y^2 = \frac{B^2x^2}{A^2} - B^2 \quad \text{sur l'hyperbole,}$$

$$y^2 = \frac{B^2x^2}{A^2} \quad \text{sur les droites.}$$

De sorte que les ordonnées correspondantes aux mêmes abscisses seront constamment plus petites sur la courbe. Cette propriété a fait donner le nom d'*Asymptotes* aux deux lignes droites déterminées par ces équations.

On peut aisément prouver, d'après les expressions précédentes, qu'en effet ces droites s'approchent continuellement de l'hyperbole; car bien que la différence des carrés de leurs ordonnées et de celles de cette courbe soit constante; cependant la différence des ordonnées elles-mêmes va toujours en diminuant, de manière à devenir enfin plus petite que toute quantité donnée. Pour le faire

voir retranchons les deux équations précédentes l'une de l'autre, en désignant par y' les ordonnées des asymptotes afin de les distinguer de celles de la courbe, qui sont représentées par y: nous aurons ainsi

$$y'^2 - y^2 = B^2$$

ou $$(y'-y)(y'+y) = B^2;$$

d'où l'on tire $$y'-y = \frac{B^2}{y'+y},$$

$y'-y$ est la différence des ordonnées. La fraction qui l'exprime a son numérateur constant, mais son dénominateur est variable, et augmente continuellement avec les ordonnées y, y' à mesure que l'on s'éloigne du centre de l'hyperbole. Ainsi cette fraction diminue sans cesse. Et comme il n'y a pas de limite à l'accroissement des ordonnées y' et y, il n'y en a pas non plus à la diminution de la fraction. La différence des deux ordonnées $y'-y$ peut donc devenir aussi petite que l'on voudra, et plus petite que toute quantité donnée.

198. Pour construire les asymptotes de l'hyperbole, on mènera à l'extrémité du premier axe une perpendiculaire, sur laquelle on prendra deux ordonnées de signes contraires, égales toutes deux au demi second axe B; puis, par les extrémités de ces ordonnées et par le centre de l'hyperbole, on mènera deux lignes droites. Ces lignes faisant avec le grand axe un angle dont la tangente trigonométrique est $\pm\frac{B}{A}$, seront évidemment les asymptotes demandées. Il est visible que l'hyperbole sera comprise toute entière dans l'angle formé par leurs directions.

199. On voit aussi, par ces résultats, que si une ellipse et une hyperbole sont construites sur les mêmes axes, les diamètres égaux de la première formeront, étant prolongés, les asymptotes de la seconde.

200. Si l'hyperbole est équilatère, on a $B = A$; les asymptotes font avec l'axe des angles de 50°, et sont perpendiculaires entre elles.

201. Il est facile de voir que les asymptotes sont aussi la limite de toutes les tangentes. En effet, l'équation d'une de ces dernières étant

$$A^2yy'' - B^2xx'' = -A^2B^2,$$

le point où elle rencontre l'axe a pour abscisse

$$x = \frac{A^2}{x''}.$$

C'est la distance de cè point au centre de la courbe. Sa position autour de ce centre dépend du signe de x'', c'est-à-dire de l'abscisse du point de tangence; mais, en ne considérant que sa longueur, on voit qu'elle diminue à mesure que x'' augmente, et qu'elle ne peut devenir nulle qu'en supposant x'' infini. Dans cette supposition, la valeur de y'' devient aussi infinie et égale à $\pm\frac{Bx''}{A}$; de sorte qu'en la substituant dans la valeur de a qui convient à la tangente, et qui est

$$a = \frac{B^2x''}{A^2y''},$$

on trouve

$$a = \pm\frac{B}{A}.$$

C'est précisément la valeur de a qui convient aux asymptotes; ainsi les tangentes de l'hyperbole s'approchent de plus en plus des asymptotes, à mesure que le point de tangence s'éloigne.

202. Les directions de la tangente et de la normale dans l'hyperbole ont aussi des rapports remarquables avec les lignes menées des foyers aux divers points de la courbe : cherchons à les découvrir.

Si, du foyer F, pour lequel $y=0$, et $x=\sqrt{A^2+B^2}$ (fig. 70), on mène une ligne droite à un point quelconque de l'hyperbole, ayant pour coordonnées x'', y'', l'équation de cette droite sera

$$y-y''=\alpha\,(x-x'').$$

La condition de passer par le foyer donne, en faisant $\sqrt{A^2+B^2}=c$,

$$\alpha=\frac{-y''}{c-x''}.$$

La tangente au même point de l'hyperbole a pour équation (n°. 192)

$$y-y''=a\,(x-x''),\qquad a=\frac{B^2x''}{A^2y''}.$$

L'angle FMT, ou fMt, qu'elle fait avec la droite, a pour tangente trigonométrique

$$\frac{\alpha-a}{1+a\alpha}.$$

qui se réduit à

$$+\frac{B^2}{cy''},$$

en mettant pour a et α leurs valeurs, et observant que

$$A^2y''^2-B^2x''^2=-A^2B^2,$$

puisque le point $x''y''$ est sur l'hyperbole.

Pareillement, si, du second foyer F', pour lequel $y=0$, et $x=-c$, on mène au point de tangence une ligne droite,

$$y-y''=\alpha'\,(x-x''),$$

on aura

$$\alpha'=\frac{y''}{c+x''}.$$

L'angle $F'MT$, ou $f'Mt$, que fait cette droite avec la

tangente, aura pour tangente trigonométrique

$$\frac{a - \alpha'}{1 + a\alpha'},$$

qui se réduit à

$$+\frac{B^2}{cy'},$$

quand on met pour a et α' leurs valeurs. Les angles FMT et $F'MT$, ayant même tangente, sont égaux entre eux ; d'où résulte cette propriété, que, *dans l'hyperbole, les droites menées du point de tangence aux deux foyers font avec la tangente, et de part et d'autre de cette ligne, des angles égaux.*

Il suit de là que *la normale* MN *divise en deux parties égales l'angle* FMf' *formé par les rayons vecteurs menés des foyers à un même point de la courbe.*

Ces propriétés existent aussi dans l'ellipse, et il n'y a de différence que dans ce qui tient à la situation de la tangente par rapport à ces deux courbes.

203. Ceci fournit la construction suivante pour mener une tangente à l'hyperbole par un point donné.

Supposons-le d'abord sur la courbe.

On mènera les rayons vecteurs FM, $F'M$ (fig. 70); on prendra sur celui-ci, à partir du point M, $MG = MF$, joignant GF, et lui menant la perpendiculaire MT, ce sera la tangente demandée.

En effet, par cette construction, les angles FMT, $F'MT$, sont égaux entre eux. On pourrait démontrer ici, comme dans l'ellipse, que la droite MT n'a que le point M de commun avec l'hyperbole.

Supposons le point donné t extérieur à la courbe.

De ce point t, comme centre, avec un rayon égal à Ft, on décrira une circonférence de cercle. Du foyer F' comme centre, et avec un rayon égal au grand axe de l'hyperbole,

on décrira une autre circonférence qui coupera la précédente en G. Menant $F'G$ qui rencontre la courbe en M, le point M sera le point de tangence, et tMT sera la tangente demandée.

Car, si l'on mène tG, on aura par construction $Gt=Ft$; de plus, le point M étant sur l'hyperbole, et $F'G$ étant égal au grand axe, $MG=MF$: donc la ligne Mt est perpendiculaire à GF, et divise l'angle $F'MF$ en deux parties égales; donc elle est la tangente demandee.

Les circonférences décrites des points F' et t, comme centres, se coupant en deux points, cette construction donnera les deux tangentes que l'on peut mener à l'hyperbole par un point extérieur.

Des propriétés de l'Hyperbole par rapport à ses diamètres conjugués.

204. Les propriétés de l'hyperbole par rapport à ses diamètres peuvent se déduire avec une extrême facilité de celles qui appartiennent à l'ellipse.

En effet, l'équation de l'hyperbole, rapportée à ses axes et au centre, est

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2.$$

Les abscisses sont alors comptées sur celui de ces axes qui rencontre la courbe.

En faisant

$$x = x' \cos \alpha + y' \cos \alpha', \quad y = x' \sin \alpha + y' \sin \alpha',$$

on pourra établir entre α et α' la relation nécessaire pour que le terme affecté de $x'y'$ disparaisse: mais on peut, sans effectuer le calcul, parvenir sur-le-champ à ce résultat; car les équations précédentes se déduisent de celles de l'article 137, qui sont relatives à l'ellipse, en changeant

B en $B\sqrt{-1}$ dans ces dernières, et, par conséquent, les résultats auxquels elles conduisent ont entre eux la même relation. On aura donc pour l'hyperbole

$$(A^2\sin^2\alpha'-B^2\cos^2\alpha')y'^2+(A^2\sin^2\alpha-B^2\cos^2\alpha)x'^2=-A^2B^2$$
$$A^2\sin\alpha\sin\alpha'-B^2\cos\alpha\cos\alpha'=0,$$

ou bien

$$A^2\tang\alpha\tang\alpha'-B^2=0.$$

En faisant successivement $x'=0$, et $y'=0$, on aura les distances de l'origine aux points dans lesquels la courbe coupe les diamètres auxquels elle est rapportée. Si l'on représente par A'^2 et B'^2 les carrés de ces distances, il viendra

$$B'^2=\frac{-A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha'-B^2\cos^2\alpha'}\quad A'^2=\frac{-A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha-B^2\cos^2\alpha}.$$

En multipliant ces deux quantités l'une par l'autre, comme dans l'art. 140, le résultat pourra se mettre sous la forme

$$A'^2B'^2=\frac{A^4B^4}{(A^2\sin\alpha\sin\alpha'-B^2\cos\alpha\cos\alpha')^2-A^2B^2\sin^2(\alpha'-\alpha)}.$$

La première partie du dénominateur s'évanouit en vertu de la relation qui existe entre α' et α; il reste simplement

$$A'^2B'^2=-\frac{A^2B^2}{\sin^2(\alpha'-\alpha)};$$

d'où il suit qu'une des quantités A', B' est imaginaire : et, par conséquent, l'hyperbole ne rencontre jamais en même tems ses deux diamètres conjugués, propriété que nous avions déja reconnue précédemment.

205. Nous pouvons à volonté supposer réelle l'une ou l'autre des quantités A', B', et ce choix déterminera quel est celui des axes des coordonnées qui rencontre la courbe. Supposons que ce soit l'axe des x', alors A' sera réel; et

pour éviter les imaginaires, nous représenterons par $-B'^2$ la quantité que nous avions nommée B'^2; ce qui donnera

$$A'^2 = -\frac{A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha - B^2\cos^2\alpha}, \quad B'^2 = \frac{A^2B^2}{A^2\sin^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha'}.$$

Alors l'équation de l'hyperbole deviendra

$$A'^2y'^2 - B'^2x'^2 = -A'^2B'^2,$$

qui se déduit de celle que nous avons trouvée, article 139, pour l'ellipse, en changeant B' en $B'\sqrt{-1}$ dans cette dernière. Les quantités $2A'$, $2B'$, sont appelées, par analogie, diamètres conjugués de l'hyperbole, quoique le premier soit le seul qui soit terminé par la courbe. $\frac{2B'^2}{A'}$ est le paramètre du premier diamètre, et $\frac{2A'^2}{B'}$ est le paramètre du second. Pour plus de simplicité, nous supprimerons les accens des variables x' et y', en nous rappelant toutefois qu'elles appartiennent à des coordonnées obliques, et il viendra

$$A'^2y^2 - B'^2x^2 = -A'^2B'^2.$$

On déduira facilement de cette équation que *les carrés des ordonnées aux diamètres conjugués sont entre eux comme les produits des distances du pied de ces ordonnées aux sommets de la courbe;* d'où il suit que, pour décrire une hyperbole dont on connaît deux diamètres conjugués, il faut décrire une autre hyperbole sur ces diamètres pour axes, et incliner convenablement les ordonnées de cette dernière, sans changer leur longueur.

206. A l'équation précédente il faudra joindre les suivantes :

$$A'^2 - B'^2 = A^2 - B^2$$
$$A'B'\sin(\alpha' - \alpha) = AB$$
$$A^2\tang\alpha\tang\alpha' - B^2 = 0.$$

qui se déduisent de celles de l'art. 141, qui appartiennent à l'ellipse, en y changeant B et B' en $B\sqrt{-1}$ et $B'\sqrt{-1}$. Ces trois équations suffisent pour résoudre toutes les questions relatives à la recherche des diamètres conjugués de l'hyperbole.

La première signifie que *la différence des carrés construits sur les diamètres conjugués est toujours égale à la différence des carrés construits sur les axes.* Il résulte de cette propriété que toutes les hyperboles n'ont pas des diamètres conjugués égaux; car la supposition de $A'=B'$ donne $A=B$, et réciproquement. *L'hyperbole équilatère est donc la seule qui ait des diamètres conjugués égaux, et tous les siens le sont deux à deux.*

La seconde des équations précédentes signifie que *le parallélogramme construit sur les diamètres conjugués est toujours équivalent au rectangle des axes*, propriété qui a également lieu pour l'ellipse.

Enfin la relation

$$A^2 \tang \alpha \tang \alpha' - B^2 = 0,$$

étant comparée à celle de l'article 141, signifie que l'on peut mener, par les extrémités du premier axe de l'hyperbole, deux cordes qui se coupent sur cette courbe, et qui soient respectivement parallèles à deux diamètres conjugués quelconques, dont la direction serait connue; ce qui permet d'appliquer à l'hyperbole le moyen que nous avons donné pour trouver deux diamètres conjugués de l'ellipse qui fassent entre eux un angle donné.

207. Si, par les extrémités du diamètre sur lequel les abscisses sont comptées, on mène deux droites dirigées d'une manière quelconque, elles auront pour équations

$$y = a'(x + A'), \quad y = a'(x - A'),$$

a et a' étant les rapports des sinus des angles qu'elles font avec ces deux diamètres. Pour que les droites se coupent sur l'hyperbole, il faudra qu'on ait

$$A'^2aa' - B'^2 = o;$$

ce qui établit pour les diamètres une condition analogue à celle qui existe pour les axes.

208. Si, par un point pris sur l'hyperbole, et dont les coordonnées, par rapport aux diamètres conjugués, seront x'', y'', on mène une tangente à cette courbe, il faudra combiner ensemble les trois équations

$$A'^2y^2 - B'^2x'^2 = -A'^2B'^2$$
$$A'^2y''^2 - B'^2x''^2 = -A'^2B'^2$$
$$y - y'' = a(x - x''),$$

a étant le rapport des sinus des angles que fait la tangente cherchée avec les diamètres conjugués auxquels la courbe est rapportée. L'analogie que nous avons remarquée entre l'ellipse et l'hyperbole s'applique encore à ces équations, et donne

$$a = \frac{B'^2}{A'^2} \cdot \frac{x''}{y''};$$

et l'équation de la tangente devient

$$A'^2yy'' - B'^2xx'' = -A'^2B'^2.$$

Celle d'une droite menée par le centre de l'hyperbole et le point de la tangence étant

$$y = a'x,$$

on aura

$$a' = \frac{y''}{x''}.$$

Multipliant cette valeur par celle de a, il vient

$$aa' = \frac{B'^2}{A'^2} \quad \text{ou} \quad A'^2aa' - B'^2 = o,$$

d'où il suit que le point de tangence est sur une hyperbole rapportée à des diamètres conjugués parallèles à ceux de la proposée, et dont le rapport est le même. Cette hyperbole passant à l'origine des coordonnées, et par le point où la tangente rencontre l'axe des x, un de ces diamètres est la distance de ce point à l'origine (fig. 71). Par conséquent, pour mener, d'un point M de l'hyperbole, une tangente à cette courbe on mènera par ce point et le centre le diamètre AM; par l'extrémité D' du diamètre DAD', on tirera $D'N$ parallèle à AM; MT, parallèle à DN, sera la tangente demandée. Cette construction est précisément celle qui nous a servi pour l'ellipse : on pourra donc appliquer à l'hyperbole toutes les conséquences que nous avons déduites relativement à la recherche des diamètres conjugués et des axes, lorsque la courbe est décrite, et que son centre est connu.

Des Propriétés de l'Hyperbole rapportée à ses asymptotes.

209. L'équation de l'hyperbole prend une forme très-remarquable, lorsque l'on choisit ses asymptotes pour axes des coordonnées. A cet effet, il faut se rappeler que ces lignes font avec le premier axe des angles dont la tangente trigonométrique est $\pm\frac{B}{A}$. Ainsi, en reprenant les formules générales

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha' \quad y = x' \sin\alpha + y' \sin\alpha',$$

il faut supposer

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{B}{A} \quad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{B}{A}.$$

Alors les coordonnées x' y' seront parallèles aux asymp-

totes. Or, en substituant ces valeurs de x et de y dans l'équation de l'hyperbole,

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

elle devient

$$(A^2\sin^2\alpha' - B^2\cos^2\alpha')y'^2 + 2(A^2\sin\alpha\sin\alpha' - B^2\cos\alpha\cos\alpha')x'y' + (A^2\sin^2\alpha - B^2\cos^2\alpha)x'^2 = -A^2B^2.$$

Les coefficiens de y'^2 et de x'^2 sont nuls d'eux-mêmes, en vertu des valeurs précédentes de tang α et de tang α'; celui de $x'y'$ se réduit à $-\frac{4A^2B^2}{A^2+B^2}$; et, en vertu de ces valeurs, l'équation de la courbe devient

$$x'y' = \frac{A^2+B^2}{4}.$$

210. Réciproquement, il serait facile de prouver que les asymptotes sont les seuls axes de coordonnées qui puissent la réduire à cette forme. Il suffit, pour s'en assurer, de substituer les valeurs générales de x et de y dans l'équation aux axes, et de déterminer α et α' par la condition que les carrés des coordonnées y'^2 et x'^2 disparaissent; car on retombe ainsi sur les valeurs précédentes de tang α et de tang α'.

211. Dans cette forme nouvelle de l'équation de l'hyperbole, on reconnaît aisément la propriété caractéristique des asymptotes, de s'approcher sans cesse de la courbe. En effet, si l'on considère la valeur de y', qui est

$$y' = \frac{A^2+B^2}{4x'},$$

on voit que cette valeur diminue à mesure que x' augmente, c'est-à-dire que la ligne PM, menée de l'asymptote à la courbe, devient de plus en plus petite, et est nulle à l'infini (fig. 72). Il en est de même des valeurs de x'

comparées à celles de y' ; et, comme ces deux variables doivent toujours être de même signe pour que le produit $x'y'$ reste toujours positif, ces résultats sont les mêmes pour les deux branches de la courbe, il n'y a que le signe de changé.

212. Si l'on prend la ligne AB (fig. 73) pour représenter le premier axe de l'hyperbole, et que AX', AY', soient les nouveaux axes des x' et des y', c'est-à-dire les asymptotes de la courbe BE, parallèle à AX' sera égale à $\sqrt{A^2+B^2}$. Or si par le sommet B de la courbe, on mène l'ordonnée BF terminée aux asymptotes, d'après la construction de ces droites BF, sera égale à B ou au second axe; par conséquent AF sera aussi égal à BE, et par suite l'on aura $AD=BD$. En répétant la même construction de l'autre côté de l'axe AB, relativement à l'autre asymptote, la symétrie de la figure montre que $ADBD'$ sera un losange, dont le côté AD moitié de AF sera $\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4}}$. Soit β l'angle $X'AY'$ formé par les asymptotes; l'équation précédente de l'hyperbole, multipliée par $\sin\beta$, donne

$$x'y'\sin\beta=\frac{A^2+B^2}{4}.\sin\beta.$$

Le premier membre représente l'aire du parallélogramme $APMQ$ construit sur les deux coordonnées AP, PM, d'un point quelconque de la courbe. Le second membre représente l'aire du parallélogramme $ADBD'$ formé sur les coordonnées AD', $D'B$, du point B qui en est le sommet; et l'équation précédente fait voir que ces quantités sont constamment égales entre elles. Le grand losange $BB'EE'$, quadruple de $ADBD'$, se nomme la puissance de l'hyperbole.

213. Lorsque l'hyperbole est équilatère, l'angle des

asymptotes est droit : sin $\beta = 1$; le losange $ADBD'$ devient un carré qui est toujours égal au rectangle des coordonnées.

Pour plus de simplicité, nous supprimerons les accens des variables x' y', en nous rappelant toutefois qu'étant comptées sur les asymptotes, elles sont en général obliques. De plus, nous ferons $\frac{A^2 + B^2}{4} = M^2$, et il viendra

$$xy = M^2.$$

214. Soient x'', y'' les coordonnées d'un point quelconque de l'hyperbole, on aura

$$x''y'' = M^2.$$

Si, par ce point, on lui mène une tangente, elle aura pour équation

$$y - y'' = a\,(x - x'').$$

Il s'agit de déterminer a.

Pour cela, nous considérerons d'abord cette droite comme une sécante; et pour trouver les points où elle rencontre l'hyperbole, nous combinerons les trois équations précédentes. Or les deux premières, étant retranchées l'une de l'autre, donnent

$$xy - x''y'' = 0,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$x\,(y - y'') + y''\,(x - x'') = 0;$$

ou, en mettant pour $y - y''$ sa valeur tirée de l'équation de la droite,

$$(x - x'')\,(ax + y'') = 0.$$

Cette relation est satisfaite quand $x = x''$; ce qui donne $y = y''$, parce que x'', y'', sont les coordonnées du premier point d'intersection. L'autre facteur, égalé à zéro, donne

$$ax + y'' = o.$$

Si la droite est tangente, cette relation devra encore être satisfaite quand $x = x''$, et $y = y''$; ce qui donne

$$ax'' + y'' = o \quad \text{ou} \quad a = -\frac{y''}{x''};$$

et, d'après cette valeur, l'équation de la tangente devient

$$y - y'' = -\frac{y''}{x''}(x - x'').$$

215. En faisant $y = o$ dans cette équation, on aura l'abscisse du point où la tangente rencontre l'axe des x, et $x - x''$ sera la valeur de la soutangente. On trouve ainsi

$$x - x'' = x'';$$

c'est-à-dire que, lorsque l'hyperbole est rapportée à ses asymptotes, la soutangente pour chaque point est égale à l'abscisse qui lui correspond. Ainsi, pour mener cette tangente, il faut prendre sur l'asymptote, à partir du pied de l'ordonnée PM, une longueur $PT = AP = x''$; MT sera la tangente demandée (fig. 73).

On voit, par cette construction même, que, si l'on prolonge la droite MT jusqu'à sa rencontre avec l'autre asymptote en t, on aura $Mt = MT$. La portion de la tangente qui est comprise entre les asymptotes se trouve donc coupée au point de tangence en deux parties égales.

216. Si l'on mène au point M le diamètre AM, et que l'on nomme β l'angle $Y'AX'$ formé par les deux asymptotes (fig. 73), les triangles AMP, TMP, donneront

$$AM^2 = y^2 + x^2 \pm 2xy \cos \beta$$
$$TM^2 = y^2 + x^2 \mp 2xy \cos \beta;$$

d'où l'on tire

$$AM^2 - MT^2 = 4xy \cos \beta. \quad (1).$$

L'angle formé par les asymptotes et l'axe de la courbe a pour tangente trigonométrique $\frac{B}{A}$: on aura donc, en le nommant θ,

$$\sin\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \cos\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

L'angle $\beta = 2\theta$: donc

$$\cos\beta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,$$

ce qui donne

$$\cos\beta = \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}.$$

L'équation de l'hyperbole donne

$$4xy = A^2 + B^2.$$

Substituant dans l'équation (1), il vient

$$AM^2 - MT^2 \text{ ou } A'^2 - MT^2 = A^2 - B^2.$$

Or, $A^2 - B^2 = A'^2 - B'^2$, donc $MT = B'$; cette relation doit subsister entre les diamètres conjugués de l'hyperbole. mAM est ún diamètre ; donc TMt est son conjugué : ainsi, lorsque l'on connaît un premier diamètre mAM de l'hyperbole, son conjugué est la portion de la tangente menée à son extrémité, et terminée aux asymptotes.

217. On vient de voir que, si d'un point quelconque M'' pris sur l'hyperbole (fig. 74), et dont les coordonnées sont x'', y'', on mène une ligne droite qui ait pour équation

$$y - y'' = a(x - x''),$$

l'autre point M''', dans lequel elle rencontre la courbe, est déterminé par l'équation

$$ax + y'' = 0; \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{y''}{a}.$$

C'est la valeur de l'abscisse AP'''. Mais, si l'on fait $y=0$ dans l'équation de la droite, elle donne aussi

$$x - x'' = -\frac{y''}{a}.$$

Alors x représente l'abscisse AQ'' du point où la droite rencontre l'axe AX, et $x - x''$ est la valeur de $P''Q''$: il résulte donc de ces expressions que $P''Q''=AP'''$. Par conséquent, si l'on mène $M'''Q'$ parallèle à AX, les triangles $P''M''Q''$, $Q'M'''Q'''$, seront égaux, et les lignes $M''Q''$, $M'''Q'''$, seront égales entre elles

C'est-à-dire que, si, d'un point quelconque de l'hyperbole, on mène une droite quelconque terminée aux asymptotes, les portions de cette droite comprises entre les asymptotes et la courbe seront égales entre elles. Cela a encore lieu quand la droite est tangente, comme on l'a vu précédemment.

Ceci fournit un moyen très-simple de décrire une hyperbole, dont on connaît un seul point M'', avec la position des asymptotes ; car en menant de ce point une droite quelconque $Q''M''Q'''$ terminée à ces lignes, on portera $Q''M''$ de Q''' en M''' ; M''' sera un nouveau point de la courbe. En répétant cette construction, on trouvera autant de points que l'on voudra.

Pour le tracé, il est plus commode de ne pas mener toutes les lignes d'un seul point M, et de faire servir à cet usage quelques-uns de ceux que l'on détermine. On évite ainsi la confusion qui résulterait d'un grand nombre de lignes passant par un même point.

On peut employer cette construction dès qu'on connaît les deux axes de l'hyperbole et son centre ; car il est alors facile de déterminer ses asymptotes.

De l'Equation polaire de l'Hyperbole, et de la Mesure de sa surface.

218. En reprenant ici la même marche que nous avons suivie pour l'ellipse, nous pouvons déduire l'équation de l'hyperbole d'une seule des circonstances qui la caractérisent.

Proposons-nous, par exemple, de trouver une courbe telle que la différence des distances de chacun de ses points à deux points donnés soit constante et égale à $2A$.

Soient F, F', les points donnés (fig. 75). Plaçons l'origine en A, au milieu de la droite FF', que nous ferons égale à $2c$; et, supposant que M soit un point de la courbe dont les coordonnées AP, PM, seront représentées par x et y, on aura, en nommant z et z', les distances FM, $F'M$,

$$z^2 = y^2 + (x-c)^2 \qquad z'^2 = y^2 + (x+c)^2$$
$$z' - z = 2A.$$

En opérant ici comme dans l'ellipse, on trouvera

$$z^2 + z'^2 = 2(y^2 + x^2 + c^2) \qquad z' = A + \frac{cx}{A}$$
$$z = -A + \frac{cx}{A}.$$

Eliminant z et z', il vient

$$A^2 + \frac{c^2x^2}{A^2} = y^2 + x^2 + c^2,$$

qui peut se mettre sous la forme

$$A^2(y^2 + x^2) - c^2x^2 = A^2(A^2 - c^2).$$

Cette forme est la même que celle que nous avons trouvée précédemment pour l'ellipse. En supposant x nul, elle

donne $y^2 = A^2 - c^2$.

C'est le carré de l'ordonnée y qui passe par l'origine. Mais, dans le cas actuel, où c est nécessairement plus grand que A, cette ordonnée est imaginaire, et de la forme $B\sqrt{-1}$, B étant une quantité réelle. On a donc, par cette substitution,

$$c^2 = A^2 + B^2;$$

et il en résulte l'équation

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2,$$

qui est celle de l'hyperbole rapportée au centre et à ses axes.

219. On pourrait, au moyen de ce qui précède, et en plaçant l'origine des x à l'un des foyers, former pour l'hyperbole une équation polaire analogue à celle que nous avons obtenue précédemment pour l'ellipse. En effet, si l'on reprend l'équation

$$z = -A + \frac{cx}{A},$$

et que l'on transporte l'origine des x au foyer F, on aura

$$z = -A + c\,\frac{(x' + c)}{A}.$$

Si l'on introduit au lieu de l'abscisse x' l'angle v formé par le rayon vecteur z avec l'axe AB, on aura

$$x' = -z \cos v;$$

et si de plus on fait $\frac{c}{a} = e$, ce qui rend e plus grand que l'unité, l'équation entre v et z sera

$$z = -\frac{A(1 - e^2)}{1 + e \cos v},$$

C'est l'équation de la branche hyperbolique BM rapportée à son foyer F intérieur.

Si l'on eût mis l'origine à l'autre foyer F', en nommant z' le rayon vecteur $F'M$, et appelant v' l'angle $MF'F$ formé par ce rayon vecteur avec l'axe, on aurait trouvé

$$z' = \frac{A(1-e^2)}{1-e\cos v'}.$$

Cette équation rentre dans la précédente, en faisant A négatif, et prenant $v' = 200° - v$ l'équation polaire

$$z = -\frac{A(1-e^2)}{1+e\cos v},$$

dans laquelle la branche hyperbolique est rapportée à son foyer intérieur, peut se déduire de l'équation analogue de l'ellipse, qui est

$$z = \frac{A(1-e^2)}{1+e\cos v},$$

en supposant A négatif, et e plus grand que l'unité. Cette dernière équation peut donc servir à représenter toutes les sections coniques, pourvu qu'elle soit modifiée convenablement.

220. Nous avons vu que l'hyperbole équilatère est, par rapport aux autres hyperboles, ce qu'est le cercle par rapport aux ellipses. En appliquant ici ce que nous avons dit à la fin de l'article 157, on pourra comparer l'aire d'une portion déterminée d'hyperbole quelconque à l'aire correspondante d'une hyperbole équilatère qui aurait le même premier axe ; et il en résulte que ces aires, comprises entre les mêmes ordonnées, sont entre elles dans le rapport du second axe au premier. Il suit de là que, pour toutes les hyperboles qui ont le même premier axe, ces aires sont dans le rapport des seconds ; mais leur mesure absolue ne peut s'obtenir que par le moyen des logarithmes, et la méthode qu'il faut suivre pour y arriver ne saurait trouver place ici.

DISCUSSION DES ÉQUATIONS.

221. Nous venons de discuter avec détail les équations particulières de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole. Nous avons vu comment on peut en déduire la forme de ces lignes, la direction de leurs branches, celles des droites, qui les touchent, en un mot, toutes leurs propriétés. Mais les équations des lignes courbes ne se présentent pas toujours sous une forme aussi simple ; elles sont le plus souvent composées d'un grand nombre de termes qui masquent les résultats les plus remarquables, ou ceux que l'on aurait le plus d'intérêt de découvrir. Il est donc utile de savoir dégager ces résultats simples du milieu de la complication qui les enveloppe; et l'on y réussit toujours en suivant la marche générale que nous venons d'indiquer dans les chapitres précédens ; mais, comme l'usage de cette méthode deviendra plus facile par quelques exemples, nous allons l'appliquer à la discussion de l'équation générale du second degré, à deux indéterminées. Ce qui réunira sous un seul point de vue tous les cas que nous avons considérés jusqu'à présent.

222. Prenons donc l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

dans laquelle x et y désignent des coordonnées rectangulaires, et cherchons la situation et la forme des courbes qu'elle représente suivant les différentes valeurs des coefficiens A, B, C, D, E, F.

Pour cela, nous la résoudrons par rapport à y ; ce qui donnera . .

$$y = -\frac{(Bx+D)}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF}.$$

A cause du double signe du radical, il y a en général deux valeurs de y; c'est-à-dire que, généralement parlant, il y a deux ordonnées qui correspondent à la même abscisse. On pourra calculer et construire ces ordonnées lorsque les valeurs données à x rendront le radical réel : si elles le rendent nul, il n'y aura qu'une valeur de y, et il n'y aura qu'une ordonnée; enfin, si elles le rendent imaginaire, il n'y en aura point du tout, et la courbe ne passera pas au-dessus de l'abscisse que l'on aura considérée.

Ainsi, pour connaître l'étendue et les limites de la courbe parallèlement à l'axe des abscisses, il faut chercher l'étendue et les limites des valeurs de x qui rendent la partie radicale réelle, nulle ou imaginaire.

223. Ces diverses circonstances dépendent du signe de la quantité

$$(B^2 - 4AC)\,x^2 + 2\,(BD - 2AE)\,x + D^2 - 4AF.$$

Or, on démontre en algèbre que, dans une expression de ce genre, on peut toujours prendre x assez grand pour que le signe de tout le polynome ne dépende plus que de celui de son premier terme, qui est ici $(B^2 - 4AC)\,x^2$; et comme le carré x^2 est toujours positif par lui-même, ce signe sera déterminé par celui de la quantité $B^2 - 4AC$. Il est visible d'ailleurs qu'il ne changera plus au-delà de ce terme, lorsque l'on prendra pour x des valeurs de plus en plus grandes, parce que le premier terme $(B^2 - 4AC)x^2$ surpassera toujours de plus en plus la somme de tous les autres; d'où résultent les conséquences suivantes.

Lorsque $B^2 - 4AC$ sera négatif, il y aura des valeurs de x au-delà desquelles l'ordonnée y deviendra toujours imaginaire, soit que l'on prenne x positif ou négatif. La courbe sera donc limitée dans le sens des x tant positifs que négatifs.

Lorsque $B^2 - 4AC$ sera nul, le polynome affecté du signe radical perdra son premier terme. Alors, si $BD - 2AE$ est une quantité positive, on pourra prendre x positif aussi grand que l'on voudra; y sera toujours réel : mais, si on le prend négatif, y finira par devenir imaginaire. Ce sera le contraire lorsque $BD - 2AE$ sera une quantité négative. Ainsi, dans ces deux cas, la courbe s'étendra indéfiniment du côté des x positifs, ou du côté des x négatifs, et elle sera limitée dans le sens opposé.

Enfin, lorsque $B^2 - 4AC$ sera positif, il y aura des valeurs positives et négatives de x, au-delà desquelles l'ordonnée y sera toujours réelle. La courbe s'étendra indéfiniment dans le sens des x tant positifs que négatifs.

En résolvant l'équation générale par rapport à x, au lieu de la résoudre par rapport à y, on trouverait pour l'axe des y des indications analogues. Il est même facile de s'assurer qu'elles rentreraient dans les précédentes; car le coefficient de y^2, sous le radical, sera encore $B^2 - 4AC$, et, selon que ce coefficient sera négatif, nul ou positif, la courbe sera limitée dans le sens des y, ou elle s'étendra indéfiniment dans un sens parallèlement à cet axe, ou enfin elle s'étendra indéfiniment dans les deux sens, du côté des y positifs et négatifs.

224. Nous sommes ainsi conduits à partager les courbes du second ordre, d'après l'étendue et la direction de leurs branches, en trois classes distinctes, savoir :

Courbes limitées dans tous les sens : caractère,	$B^2 - 4AC < 0$
Courbes indéfinies dans un sens, et limitées dans un sens opposé.	$B^2 - 4AC = 0$
Courbes indéfinies dans tous les sens.	$B^2 - 4AC > 0$

L'ellipse, telle que nous l'avons discutée dans le n°. 114, est comprise dans la première classe; la parabole, dans la

seconde; l'hyperbole, dans la troisième. Mais nous ne savons pas encore si elles sont les seules qui s'y trouvent renfermées : c'est une question que nous examinerons par la suite.

225. Un seul cas échappe à cette classification, c'est celui dans lequel A et C sont nuls à-la-fois; car alors l'équation générale perd ses termes en x^2 et en y^2, et se réduit à

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0;$$

de sorte qu'on ne peut plus la résoudre à la manière du second degré. Mais dans ce cas, toutes les valeurs possibles de x donnent pour y des valeurs réelles, et réciproquement. La courbe s'étend donc indéfiniment dans tous les sens, et elle est par conséquent du genre de l'hyperbole. En effet, si l'on transporte les coordonnées parallèlement à elles-mêmes, en faisant

$$x = a + x', \quad y = b + y',$$

elle devient

$$Bx'y' + (Ba + D)y' + (Bb + E)x' + Bab + Db + Ea + F = 0.$$

et, en déterminant les coordonnées a et b de la nouvelle origine de manière que l'on ait

$$Ba + D = 0, \quad Bb + E = 0,$$

ce qui est toujours possible, elle se réduit à

$$B^2x'y' + BF - DE = 0.$$

Sous cette forme, on voit qu'elle représente une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Nous allons maintenant discuter en particulier les trois classes de courbes dont nous venons de reconnaître l'existence, afin de déterminer précisément leur forme et leur situation.

Première classe. *Courbes limitées dans tous les sens.*

Caractère, $B^2 - 4AC < 0$.

226. Pour discuter cette classe de courbes reprenons la valeur générale de y, qui est

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF}.$$

Cette expression nous apprend que, pour trouver les points de la courbe, il faut construire pour chaque abscisse AP (fig. 75 *bis*) une quantité égale à $\left\{\frac{Bx+D}{2A}\right\}$, et porter au-dessus et au-dessous du point N, déterminé par cette condition, la quantité que le radical représente; d'où il suit que chacun de ces points divise en deux parties égales la ligne correspondante MM' qui se termine à la courbe.

Cette quantité $-\left\{\frac{Bx+D}{2A}\right\}$, qui varie avec chaque valeur de x, est l'ordonnée d'une ligne droite qui aurait pour équation

$$y = -\left\{\frac{Bx+D}{2A}\right\}.$$

Par conséquent, cette droite est le lieu de tous les points N que nous venons de considérer; et elle divise en deux parties égales toutes les droites menées parallèlement à l'axe des y, et terminées à la courbe. On peut donc, à cause de cette propriété, lui donner le nom de *Diamètre*. Ce résultat s'étend à toutes les courbes du second ordre.

227. Cherchons maintenant la limite de la courbe dans

le sens des x. Pour cela, il est très-utile de décomposer en facteurs le polynome qui est sous le signe radical. Or, si l'on écrit ainsi la valeur de y

$$y=-\left\{\frac{Bx+D}{2A}\right\}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)\left\{x^2+2\frac{(BD-2AE)}{B^2-4AC}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}\right\}},$$

et que l'on représente par x' et x'' les deux racines de l'équation

$$x^2+2\frac{(BD-2AE)}{B^2-4AC}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}=0,$$

on pourra ensuite lui donner cette forme

$$y=-\left\{\frac{Bx+D}{2A}\right\}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')}.$$

Les limites de la courbe dépendront des valeurs de x' et de x''.

Or ces racines peuvent être réelles et inégales, ou réelles et égales, ou enfin toutes deux imaginaires. Nous allons discuter successivement ces trois cas.

228. Si elles sont réelles et inégales, lorsque les valeurs de x tomberont entre x' et x'', les facteurs $x-x'$, $x-x''$, seront de signe contraire, et leur produit $(x-x')(x-x'')$ sera négatif; et comme B^2-4AC est aussi négatif, la quantité $(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')$ sera positive; par conséquent, l'ordonnée y aura deux valeurs réelles.

Lorsqu'on fera $x=x'$ ou $x=x''$, le radical s'évanouira, et y n'aura qu'une seule valeur, qui sera réelle et égale à $-\frac{Bx+D}{2A}$. Dans ce cas, il n'y aura rien à porter au-dessus du diamètre pour avoir les ordonnées de la courbe; et, par conséquent, les abscisses x' et x'' appartiennent aux points où la courbe rencontre son diamètre.

Enfin, lorsque l'on prendra x positif ou négatif, mais plus grand que x' et que x'', les deux facteurs $x - x'$, $x - x''$, seront positifs aussi bien que leur produit $(x - x')(x - x'')$; et à cause de $B^2 - 4AC$ négatif, la quantité $(B^2 - 4AC)(x - x')(x - x'')$ sera négative : ce qui rend les deux valeurs de y imaginaires.

On voit donc, par cette discussion, que la courbe est continue entre les abscisses x' et x'', et qu'elle ne s'étend pas au-delà. Si, aux extrémités de ces abscisses, on élève des perpendiculaires indéfinies sur l'axe des x, ces droites comprendront la courbe, et même elles lui seront tangentes, puisque l'on peut les considérer comme des sécantes dont les deux points d'intersection se réduisent à un seul.

En résolvant l'équation proposée par rapport à x, au lieu de la résoudre par rapport à y, on arriverait à des conclusions semblables; on trouverait la courbe limitée entre deux valeurs de y, aux extrémités desquelles on pourrait mener deux droites parallèles à l'axe des abscisses, et qui renfermeraient la courbe en la touchant.

On aura donc ainsi quatre points de la courbe; et, si l'on veut, on en pourra trouver un plus grand nombre entre les limites où elle s'étend. Si l'on veut connaître les points où elle coupe l'axe des x, on fera y nul dans l'équation proposée; ce qui donnera

$$Cx^2 + Ex + F = 0.$$

Les racines de cette équation seront les abscisses des points d'intersection; et, suivant qu'elles seront réelles et inégales, ou réelles et égales, ou imaginaires, la courbe coupera l'axe des x en deux points, ou le touchera en un seul, ou ne le rencontrera pas.

De même, en faisant $x=0$, on aura

$$Ay^2+Dy+F=0.$$

et les racines de cette équation donneront les points où la courbe rencontre l'axe des y.

Cette courbe sera donc toujours fermée, comme l'ellipse; mais sa position par rapport aux axes dépendra des valeurs particulières des coefficiens AB. . . . ; et, d'après ce qui précède, on pourra aisément la découvrir dans chaque cas particulier. Pour ne laisser aucune incertitude à cet égard, nous avons formé ici le tableau de ces diverses conditions.

CONDITIONS GÉOMÉTRIQUES.	CONDITIONS ENTRE LES COEFFICIENS.	
Courbe fermée du genre de l'ellipse.	$B^2-4AC<0$	(1)
Réalité des racines x' et x''.	$(BD-2AE)^2-(D^2-4AF)(B^2-4AC)>0$	(2)
Deux points d'intersection avec l'axe des x.	$E^2-4CF>0$	(3)
Un point de contact avec l'axe des x.	$E^2-4CF=0$	(4)
Aucun point d'intersection avec l'axe des x.	$E^2-4CF<0$	(5)
Deux points d'intersection avec l'axe des y.	$D^2-4AF>0$	(6)
Un point de contact avec l'axe des y.	$D^2-4AF=0$	(7)
Aucun point d'intersection avec l'axe des y.	$D^2-4AF<0$	(8)

Lorsqu'on voudra discuter une équation particulière, dans laquelle les coefficiens AB.... seront des nombres, il ne faudra pas chercher à rappeler dans sa mémoire les

conditions précédentes, pour chercher ensuite numériquement celles auxquelles satisfait l'exemple proposé, car on ne tarderait pas à les oublier; mais il faudra reprendre le raisonnement général et la marche directe de discussion. On sera conduit à ces résultats immédiatement, et sans aucun effort.

Voici quelques exemples qui suffiront pour éclaircir ce qui précède, et sur lesquels les élèves feront bien de s'exercer :

$$y^2-2xy+2x^2-2y+2x=0$$

satisfait aux conditions (1) (2) (3) (6) (fig. 76);

$$y^2-2xy+2x^2-2x=0$$

satisfait aux conditions (1) (2) (3) (7) (fig. 77);

$$y^2-2xy+2x^2+2y+x+3=0$$

satisfait aux conditions (1) (2) (5) (8) (fig. 78).

229. Il existe un cas particulier compris dans les conditions précédentes, mais sur lequel il est cependant bon d'être prévenu, parce qu'il conduit à un résultat fort simple; c'est celui où l'on a $A=C$, et $B=0$. Alors l'équation générale devient

$$Ay^2+Ax^2+Dy+Ex+F=0,$$

ou, en divisant par A,

$$y^2+x^2+\frac{D}{A}y+\frac{E}{A}x+\frac{F}{A}=0$$

Si l'on ajoute dans les deux membres la quantité $\frac{D^2+E^2}{4A^2}$, l'équation pourra être mise sous la forme

$$\left\{y+\frac{D}{2A}\right\}^2+\left\{x+\frac{E}{2A}\right\}^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2};$$

et, en la comparant à celle de l'art. 105, on voit qu'elle représente un cercle qui a pour coordonnées de son centre $-\frac{D}{2A}$, $-\frac{E}{2A}$, et pour rayon $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A}$. Pour que ce cercle soit réel, il faut que la quantité D^2+E^2-4AF soit positive ; ce qui revient à dire que la condition (2) est satisfaite.

230. Venons maintenant à la seconde supposition que les valeurs de x' et de x'' soient égales entre elles : alors le produit $(x-x')(x-x'')$ sera un carré $(x-x')^2$, et l'on aura pour la valeur générale de y

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{x-x'}{2A}\sqrt{B^2-4AC}.$$

Quelque valeur que l'on donne à x, tant que $x-x'$ ne sera pas nul, la valeur de y sera imaginaire, à cause de $B^2-4AC<0$; mais, si l'on fait $x=x'$, elle se réduit à une seule valeur, qui est réelle et égale à $-\left\{\frac{Bx'+D}{2A}\right\}$. Ainsi, dans ce cas, la courbe se réduit à un point unique, situé sur le diamètre, et dont les coordonnées sont

$$x=x',\qquad y=-\frac{Bx'+D}{2A}.$$

Pour que ce résultat puisse avoir lieu, et que les valeurs de x' et de x'' soient égales entre elles, il faut que la partie radicale de leur expression, tirée de l'équation qui les donne, s'évanouisse d'elle-même, ce qui exige qu'on ait

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)=0 \quad (9).$$

Cette condition, jointe à la première $B^2-4AC<0$, détermine les cas où la courbe se réduit à un point.

Il est facile de voir *à posteriori* à quoi tient ce résultat ; car, en faisant disparaître le radical de la valeur de y, on obtient, dans le cas actuel, l'équation

$$(2Ay+Bx+D)^2-(B^2-4AC)(x-x')^2=0,$$

qui est équivalente à la proposée. Or, B^2-4AC étant négatif, le premier membre est la somme de deux quantités positives, et ne peut jamais devenir nul, à moins que chacune de ces quantités ne soit nulle séparément ; ce qui ramène aux valeurs que nous venons d'obtenir.

Voici quelques exemples de ce cas, sur lesquels les élèves pourront s'exercer :

$$x^2+y^2=0, \qquad y^2+x^2-2x+1=0.$$

231. Considérons enfin le cas où les deux racines x' et x'' sont imaginaires ; alors le polynome $(x-x')(x-x'')$ ne pourra jamais changer de signe, quelque valeur que l'on donne à x. Cette proposition est démontrée dans les élémens d'algèbre. Or, on peut toujours prendre x assez grand pour que ce polynome devienne positif, puisque son premier terme est x^2. Ainsi, il restera toujours positif ; et comme le facteur B^2-4AC, qui le multiplie sous le radical, est négatif dans la supposition présente, il s'ensuit que la valeur de y sera toujours imaginaire, quel que soit x : de sorte qu'il n'y aura pas de courbe.

Cela arrivera lorsque la quantité qui entre sous le signe radical, dans les valeurs de x' et de x'', sera négative ; c'est-à-dire, qu'il faudra qu'on ait

$$B^2-4AC<0, \quad (BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)<0.$$

En introduisant ces conditions dans l'équation générale,

on voit facilement pourquoi elle n'admet pas de solution réelle. En effet, la seconde inégalité peut être remplacée par l'équation

$$\frac{D^2 - 4AF}{B^2 - 4AC} = \frac{(BD - 2AE)^2}{(B^2 - 4AC)^2} + K^2,$$

K^2 désignant une quantité essentiellement positive. En substituant cette valeur de $\frac{D^2 - 4AF}{B^2 - 4AC}$ dans l'expression générale de y, celle-ci devient

$$-\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)\left\{x^2+2\frac{(BD-2AE)}{B^2-4AC}x+\frac{(BD-2AE)^2}{(B^2-4AC)^2}+K^2\right\}}.$$

Elle peut se mettre sous la forme

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)\left\{\left(x+\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}\right)^2+K^2\right\}};$$

et, en faisant évanouir le radical, on en tire

$$(2Ay+Bx+D)^2-(B^2-4AC)\left\{x+\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}\right\}^2-(B^2-4AC)K^2=0,$$

équation équivalente à la proposée : mais, B^2-4AC étant négatif, elle est composée de trois quantités positives dont la somme ne peut être nulle, à moins que chacune d'elles ne soit nulle séparément. On peut bien remplir cette condition pour les deux premières, en posant les équations

$$2Ay + Bx + D = 0, \qquad x + \frac{BD - 2AE}{B^2 - 4AC} = 0,$$

qui détermineront x et y. Mais la troisième quantité K^2, qui ne contient que les coefficiens, ne peut être nulle d'elle-même, du moins en général, et c'est ce qui rend l'équation impossible.

Si cependant la quantité K était nulle, on aurait alors deux équations du premier degré pour déterminer x et y, et l'équation représenterait un point; mais cette supposition exige qu'on ait entre les coefficiens $ABC\ldots$ la relation

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)=0.$$

Ce qui nous ramène au cas que nous venons de discuter précédemment, et dans lequel les valeurs de x' et de x'' étaient égales entre elles.

Voici quelques exemples dans lesquels l'équation proposée est impossible :

$$y^2+xy+x^2+\tfrac{1}{2}x+y+1=0\,,\quad y^2+x^2+2x+2=0.$$

On voit en effet que ces équations peuvent être mises sous la forme

$$(2y+x+1)^2+3x^2+3=0,\quad y^2+(x+1)^2+1=0.$$

Jusqu'ici nous n'avons résolu l'équation proposée que par rapport à y; mais on trouverait des résultats absolument semblables en la résolvant par rapport à x, et l'on arriverait aux mêmes conditions. C'est ce que l'on pourrait aisément vérifier *à posteriori*; mais on peut le voir immédiatement, d'après la forme même de la quantité

$$(BD-2\,AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF),$$

à laquelle se rapportent toutes les conditions précédentes; car cette quantité étant développée, réduite et divisée par $4A$, devient

$$AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4\,AFC.$$

Et, sous cette forme, on voit qu'elle reste la même,

quand on y change A en C, et D en E; ce qui revient à changer y en x dans l'équation générale.

232. Il résulte de la discussion précédente que les courbes du second ordre, comprises dans la première classe, pour laquelle $B^2 - 4AC$ est négatif, sont en général des courbes fermées comme l'ellipse. Mais les conditions nécessaires donnent lieu à trois variétés, qui sont le point isolé, la courbe imaginaire et le cercle.

SECONDE CLASSE. *Courbes limitées dans un sens, et indéfinies dans l'autre.*

Caractère, $B^2 - 4AC = 0$.

233. Considérons maintenant la seconde classe de courbes du second ordre, pour lesquelles $B^2 - 4AC$ est nul. Dans ce cas, la valeur générale de y devient

$$y = -\frac{Bx+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{2(BD-2AE)x+D^2-4AF};$$

et, en faisant, pour plus de simplicité,

$$\frac{D^2-4AF}{2(BD-2AE)} = -x',$$

elle peut se mettre sous la forme

$$y = -\frac{(Bx+D)}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{2(BD-2AE)(x-x')}.$$

Si $BD - 2AE$ est positif, tant que l'on fera x plus grand que x', le facteur $x - x'$ sera positif, et le radical sera réel; il deviendra nul, quand x sera égal à x'; et quand x sera moindre que x', le facteur $x - x'$ deviendra

négatif, et le radical sera imaginaire. La courbe s'étend donc à l'infini dans le sens des x positifs, depuis l'abscisse $x=x'$; l'ordonnée correspondante à cette abscisse servira de limite, et touchera la courbe.

Les résultats seront contraires, lorsque $BD-2AE$ sera une quantité négative. La courbe s'étendra indéfiniment dans le sens des x négatifs, et sera limitée dans le sens opposé.

Dans ces deux cas, la ligne droite qui a pour équation

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}$$

sera un *Diamètre* de la courbe, en donnant à cette expression le sens que nous lui avons attribué dans l'article 226.

234. On arriverait à des résultats semblables, en résolvant l'équation par rapport à x; l'équation du diamètre serait alors

$$x=-\frac{By+E}{2C},$$

ou, en tirant la valeur de y,

$$y=-\frac{2Cx}{B}-\frac{E}{B}.$$

Or, B^2-4AC étant nul, on a

$$\frac{2C}{B}=\frac{B}{2A}.$$

Ainsi l'équation de ce diamètre devient

$$y=-\frac{Bx}{2A}-\frac{E}{B};$$

c'est-à-dire qu'il est parallèle à l'autre diamètre

$$y = -\frac{Bx}{2A} - \frac{D}{2A}$$

que l'on avait trouvé en résolvant l'équation proposée par rapport à y : nouvelle analogie de la courbe avec la parabole dont tous les diamètres sont parallèles entre eux.

235. Quant à la position particulière de cette courbe, et à sa situation par rapport aux axes, elle dépendra des valeurs des coefficiens AB... On la découvrira en suivant la marche que nous avons appliquée, dans le n°. 228, aux courbes du genre de l'ellipse, et on arrivera à des conséquences analogues.

236. Au reste, la condition caractéristique du genre de courbe que nous considérons ici est très-facile à reconnaître; car, lorsque $B^2 - 4AC$ est nul, les trois premiers termes $Ay^2 + Bxy + Cx^2$ de l'équation générale forment un carré parfait, qui est celui de la quantité $y\sqrt{A} + x\sqrt{C}$.

237. Voici quelques exemples sur lesquels on pourra s'exercer :

$y^2 - 2xy + x^2 + x = 0$ (Fig. 79)
$y^2 - 2xy + x^2 + 2y = 0$ (Fig. 80)
$y^2 - 2xy + x^2 + 2y + 1 = 0$ (Fig. 81)
$y^2 - 2xy + x^2 - 2y - 1 = 0$ (Fig. 82)
$y^2 - 2xy + x^2 - 2y - 2x = 0$. (Fig. 83)

238. Si la quantité $BD - 2AE$, qui multiplie x sous le radical, était nulle, la valeur de y deviendrait

$$y = -\left\{\frac{Bx + D}{2A}\right\} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{D^2 - 4AF}.$$

Alors la courbe dégénère en deux lignes droites parallèles entre elles; et selon que la quantité $D^2 - 4AF$ est

positive, nulle ou négative, ces droites sont toutes deux réelles, ou se confondent et se réduisent à une seule, ou enfin deviennent toutes deux imaginaires.

Dans ce cas, l'équation générale est décomposable en facteurs du premier degré, et peut se mettre sous la forme

$$(2Ay+Bx+D+\sqrt{D^2-4AF})(2Ay+Bx+D-\sqrt{D^2-4AF})=0.$$

En voici quelques exemples :

$y^2-2xy+x^2-1=0$	Deux lignes	(Fig. 84)
$y^2+4xy+4x^2-4=0$	droites.	(Fig. 85)
$y^2-2xy+x^2+2y-2x+1=0$.	Une seule	(Fig. 86)
$y^2-4xy+4x^2=0$	ligne droite.	(Fig. 87)
$y^2+2xy+x^2+1=0$	Deux droites	(Fig. 87 *a*)
$y^2+y+1=0$	imaginaires..	(Fig. 87 *b*)

239. Il résulte de cette discussion, que les courbes du second ordre, comprises dans la seconde classe, pour laquelle B^2-4AC est nul, sont en général indéfinies dans un seul sens, comme la parabole, mais peuvent cependant donner comme variétés deux lignes droites parallèles, ou une seule droite, ou deux droites imaginaires.

TROISIÈME CLASSE. *Courbes indéfinies dans tous les sens.*

Caractère, $B^2-4AC.>0$.

240. La discussion de cette classe de courbes est extrêmement facile, après ce qui précède ; car elle se fait précisément par la même marche et par les mêmes procédés. Si l'on reprend la valeur générale de y, qui est

$$y=-\left\{\frac{Bx+D}{2A}\right\}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)\left\{x^2+2\frac{(BD-2AE)}{(B^2-4AC)}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}\right\}},$$

et que l'on représente par x' et x'' les deux racines de l'équation

$$x^2+2\frac{(BD-2AE)}{(B^2-4AC)}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}=0,$$

on pourra lui donner cette forme

$$y=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')};$$

et, si l'on suppose que x' et x'' soient des quantités réelles, comme B^2-4AC est une quantité positive, on verra facilement que la courbe est toujours imaginaire entre les abscisses x' et x'', mais qu'elle est toujours réelle hors de ces limites, où elle se trouve touchée par ses ordonnées : forme tout-à-fait analogue à celle de l'hyperbole (fig. 88).

La condition de la réalité des racines x' et x'' est

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)>0.$$

Nous l'avions déja obtenue dans l'article 228, pour la réalité des courbes du genre de l'ellipse. On voit donc que le signe seul de la quantité B^2-4AC détermine la courbe à être fermée et limitée, ou composée de deux branches séparées et indéfinies.

On voit d'ailleurs que les abscisses x' et x'', entre lesquelles la courbe devient imaginaire, répondent à son intersection avec le diamètre qui a pour équation

$$y=-\frac{(Bx+D)}{2A}.$$

Voici quelques exemples sur lesquels on pourra s'exercer:

$y^2 - 2xy - x^2 + 2 = 0$ (Fig. 89)
$y^2 - x^2 + 2x - 2y + 1 = 0$ (Fig. 90)
$y^2 - 2xy - x^2 - 2y + 2x + 3 = 0$ (Fig. 91)
$y^2 - 2x^2 - 2y + 6x - 3 = 0$ (Fig. 92)

On trouverait, comme dans l'article 228, les conditions nécessaires pour que la courbe coupe les axes des x et des y, ou les touche en un seul point, ou enfin ne les rencontre pas.

241. Il y a cependant un cas qui pourrait embarrasser les élèves, et sur lequel il est bon d'être prévenu ; c'est celui où l'un des carrés x^2 ou y^2 manque dans l'équation proposée, quoique le terme en xy s'y trouve. Comme si l'on avait par exemple,

$$Ay^2 + Bxy + Dy + Ex + F = 0 ;$$

alors, en faisant $y = 0$ pour avoir l'intersection de la courbe avec l'axe des x, on ne trouve pour x qu'une seule valeur

$$x = -\frac{F}{E} ;$$

et cette valeur devient même infinie, si E est nul. Pour savoir ce que ce résultat signifie, considérons d'abord ce dernier cas, qui est le plus simple, puisque l'on a alors

$$Ay^2 + Bxy + Dy + F = 0.$$

Si l'on prend la valeur de x, on trouve

$$x = -\frac{(Ay^2 + Dy + F)}{By}.$$

Toutes les suppositions réelles pour y donneront des valeurs réelles pour x : mais ces valeurs vont toujours en

augmentant, à mesure que y diminue; car on peut les mettre sous la forme

$$x = -\frac{A}{B}y - \frac{D}{B} - \frac{F}{By};$$

et, soit que l'on prenne y positif ou négatif, plus on le prendra petit, plus la valeur de x sera considérable : enfin, lorsque l'on suppose y nul, elle devient tout-à-fait infinie ; c'est-à-dire que les deux branches opposées de la courbe s'approchent sans cesse de l'axe des abscisses, sans pouvoir jamais l'atteindre. Cet axe est par conséquent une *Asymptote* de la courbe.

Au contraire, à mesure que y augmentera, le terme $\frac{F}{By}$ deviendra moindre; et, par conséquent, la valeur correspondante de x, sur la courbe, approchera de plus en plus d'être égale à celle de la droite qui aurait pour équation

$$x = -\frac{A}{B}y - \frac{D}{B},$$

avec laquelle elle coïncidera tout-à-fait, si y devient infinie; ce qui rend nul le terme $\frac{F}{y}$. Cette droite sera donc une autre asymptote de la courbe.

242. On trouverait des résultats tout-à-fait analogues, en traitant l'équation plus générale

$$Ay^2 + Bxy + Dy + Ex + F = 0;$$

seulement l'une des asymptotes serait simplement parallèle à l'axe des x, au lieu de se confondre avec cet axe. En effet, en résolvant l'équation par rapport à x, on trouve

$$x = -\frac{(Ay^2 + Dy + F)}{By + E}.$$

Soit que l'on prenne y positif ou négatif, à mesure que le dénominateur $By + E$ diminue, la valeur de x augmente; et elle devient tout-à-fait infinie, quand on a

$$By + E = 0;$$

ce qui donne

$$y = -\frac{E}{B}.$$

C'est l'équation d'une ligne droite parallèle à l'axe des abscisses. Les deux branches de la courbe s'en approchent sans cesse, à mesure que x augmente; mais elles ne la rencontrent qu'à une distance infinie de l'origine. Cette droite est par conséquent une asymptote de la courbe.

Quant à l'autre asymptote, on la trouverait comme dans le cas précédent; car, en effectuant la division indiquée dans la valeur de x, on aurait

$$x = -\frac{A}{B}y - \frac{(BD - AE)}{B^2} - \frac{(AE^2 + B^2F - BDE)}{B^2(By + E)}.$$

A mesure que y augmente, soit positivement, soit négativement, le terme constant, divisé par $By + E$ diminue: ainsi la valeur de x, déterminée par la courbe pour chaque ordonnée y, approche de plus en plus d'être égale à la valeur donnée par la ligne droite qui aurait pour équation

$$x = -\frac{A}{B}y - \frac{BD - AE}{B^2}.$$

Enfin, si y devient infinie, ces valeurs deviennent égales. La droite dont il s'agit est donc une autre asymptote de la courbe proposée.

Il résulte de cet examen que, lorsque le carré de x manque dans l'équation proposée, sans que le terme en

xy disparaisse, il existe deux lignes droites qui sont asymptotes de la courbe, et dont l'une est parallèle à l'axe des x.

Les résultats seraient contraires, si le carré manquant eût été y^2. Alors il existe encore deux asymptotes, dont une est parallèle à l'axe des y.

Enfin, si les deux carrés x^2 et y^2 manquent à-la-fois, les deux asymptotes sont respectivement parallèles aux axes des y et des x; car alors l'équation devient

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0;$$

et l'on a vu, dans l'article 225, qu'elle appartient à une hyperbole rapportée à des axes parallèles aux asymptotes. Pour plus de simplicité, nous avons d'abord obtenu ce résultat par la transformation des coordonnées; mais on y parviendrait également, comme dans le cas précédent, par la discussion directe de la marche de la courbe.

En général, quelle que soit la forme de l'équation, il suffit que $B^2 - 4AC$ soit une quantité positive, pour que la courbe ait deux asymptotes linéaires; car, en changeant seulement la direction des coordonnées, sans changer l'origine, mais en les prenant inclinées sous des angles quelconques, on pourra toujours déterminer les angles de manière à faire disparaître en même tems les carrés x'^2 et y'^2 dans la transformée; ce qui la ramènera directement à la forme précédente, qui est celle de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes.

243. Passons maintenant au cas où les deux racines x' et x'' sont égales entre elles; alors le produit $(x-x')(x-x'')$ devient un carré égal à $(x - x')^2$, et l'on a

$$y = -\left\{\frac{Bx + D}{2A}\right\} \pm (x - x') \frac{1}{2A} \sqrt{B^2 - 4AC}.$$

L'équation représente alors deux lignes droites qui sont

toujours réelles, puisque $B^2 - 4AC$ est une quantité positive. La condition de cette égalité des racines exige qu'on ait

$$(BD - 2AE)^2 - (B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF) = 0.$$

Comme le coefficient de x n'est pas le même dans les équations des deux droites, il s'ensuit qu'elles ne sont pas parallèles.

Cette condition est la même que nous avons obtenue dans l'article 230.

Dans ce cas, l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$\left\{2Ay + Bx + D - (x - x')\sqrt{(B^2 - 4AC)}\right\} \times$$
$$\left\{2Ay + Bx + D + (x - x')\sqrt{B^2 - 4AC}\right\} = 0.$$

Elle est donc décomposable en facteurs du premier degré, et peut être satisfaite en égalant séparément à zéro chacun de ces facteurs.

244. Généralement, lorsque l'équation proposée se trouve multipliée toute entière par des facteurs rationnels en x et en y, il faut avoir grand soin de les discuter successivement, et chacun en particulier; car, puisqu'on satisfait à l'équation en les égalant à zéro, ils offrent autant de solutions qu'il n'est pas permis de négliger.

245. Voici quelques exemples du cas précédent:

$y^2 - 2x^2 + 2y + 1 = 0$ (Fig. 93)

$y^2 - x^2 = 0$ (Fig. 94)

$y^2 + xy - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ (Fig. 95)

246. Venons enfin au cas où les deux racines x' et x'' sont imaginaires : alors le polynome $(x - x')(x - x'')$ ne peut jamais changer de signe ; et, comme son premier

terme est x^2, il reste toujours positif; de plus, $B^2 - 4AC$ est aussi positif. Ainsi, quelque supposition qu'on fasse pour x, la valeur de y sera toujours réelle, et chaque abscisse donnera des points de la courbe. Cependant cette courbe sera encore composée de deux branches séparées (fig. 96), car chaque ordonnée est divisée en deux parties égales par le diamètre dont l'équation est

$$y = -\frac{(Bx + D)}{2A}$$

et, comme le radical $\sqrt{(B^2 - 4AC)(x - x')(x - x'')}$ ne peut jamais devenir nul, ce diamètre ne coupe pas la courbe qui s'étend ainsi indéfiniment au-dessus de lui et au-dessous. Cette circonstance est tout-à-fait analogue à celle que présente le second axe de l'hyperbole.

Les conditions particulières à ce cas sont

$$B^2 - 4AC > 0,\ (BD - 2AE)^2 - (B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF) < 0$$

En voici quelques exemples :

$$y^2 - 2xy - x^2 - 2 = 0 \qquad \text{(Fig. 97)}$$
$$y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{(Fig. 98)}$$
$$y^2 - 2xy - x^2 - 2x - 2 = 0 \qquad \text{(Fig. 99)}$$

247. Si $A = -C$, et $B = 0$, l'équation générale devient

$$Ay^2 - Ax^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

ou

$$y^2 - x^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}x + \frac{F}{A} = 0.$$

Elle peut, par conséquent, se mettre sous la forme

$$\left\{y + \frac{D}{2A}\right\}^2 - \left\{x - \frac{E}{2A}\right\}^2 = \frac{D^2 - E^2 - 4AF}{4A^2}$$

et l'on voit qu'elle représente alors une hyperbole équilatère, qui a pour coordonnées du centre $-\frac{D}{2A}$, $+\frac{E}{2A}$, et pour puissance $\frac{D^2 - E^2 - 4AF}{4A^2}$. Ce cas est analogue à celui du cercle, dans la première classe des courbes, article 229.

248. Il résulte de cette discussion que les courbes du second ordre, dans lesquelles $B^2 - 4AC$ est positif, sont toujours des courbes indéfinies composées de deux branches séparées ; elles comprennent comme variétés deux lignes droites qui se coupent, et l'hyperbole équilatère.

249. On voit, par ce qui précède, comment il est possible de déduire de l'équation d'une ligne courbe sa forme, son étendue, ses limites et toutes les sinuosités de son cours ; la marche que nous venons de suivre est générale, et s'appliquerait également à toutes les courbes algébriques. Il est donc très-utile de s'en bien pénétrer, et de s'en rendre l'usage familier par des exemples. Mais aussi c'est tout ce qu'il faut retenir ; car il serait inutile, et même nuisible, de fixer dans sa mémoire les conditions particulières qui ont lieu entre les coefficiens suivant les différens cas, et il faut plutôt se laisser naturellement conduire à ces conditions par la suite des raisonnemens.

Identité de toutes les Courbes du second ordre avec les Sections coniques.

250. Les courbes que nous venons de découvrir en discutant l'équation générale du second degré, nous ont offert la plus grande analogie avec les sections du cône, et même s'y sont fréquemment ramenées. Il est intéressant de savoir

au juste jusqu'où s'étend cette analogie ; et, pour cela, nous n'avons pas de moyen plus sûr que de reprendre l'équation générale, et de la réduire à la forme la plus simple par la transformation des coordonnées, sans toutefois particulariser en aucune façon les courbes qu'elle renferme.

Pour cela, reprenons cette équation générale, qui est

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Sur la courbe qu'elle représente, prenons un point quelconque dont les coordonnées soient a et b, en sorte que l'on ait

$$Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F = 0;$$

et transportons l'origine des coordonnées à ce point, en faisant

$$x = a + x', \quad y = b + y',$$

x' et y' étant de nouvelles coordonnées parallèles aux premières. Cela est toujours possible, si l'équation proposée représente une courbe réelle; en y substituant pour x et y leurs valeurs, elle devient

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + (2Ab + Ba + D)y' + (2Ca + Bb + E)x' = 0$$

ou, en faisant, pour plus de simplicité,

$$2Ab + Ba + D = D' \quad 2Ca + Bb + E = E',$$

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + D'y' + E'x' = 0.$$

251. Changeons maintenant la direction des coordonnées $x'\,y'$ autour de la nouvelle origine, en les laissant toujours rectangulaires : pour cela, il faudra employer les formules

$$x' = x'' \cos\alpha - y'' \sin\alpha, \quad y' = x'' \sin\alpha + y'' \cos\alpha,$$

x'' et y'' étant les nouvelles coordonnées. En substituant ces valeurs de x' et de y', on a

$$\left.\begin{array}{l}(A\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)\,y''^2\\ +(A\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)\,x''^2\\ +\{2A\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2C\sin\alpha\cos\alpha\}\,x''y''\\ +(D'\cos\alpha - E'\sin\alpha)\,y'' + (D'\sin\alpha + E'\cos\alpha)\,x''\end{array}\right\}=0.$$

Comme l'angle α est tout-à-fait arbitraire, on peut le déterminer de manière à faire disparaître le terme affecté de $x''y''$. Pour cela il faudra établir la condition

$$2A\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0.$$

Or, on a en général

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Ainsi l'équation qui détermine α peut se mettre sous cette forme

$$(A - C)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0;$$

et elle donne

$$\tang 2\alpha = -\frac{B}{A-C}.$$

L'angle 2α sera toujours réel, puisque sa tangente est réelle : ainsi la transformation et la réduction précédente sont toujours possibles. Pour l'introduire dans l'équation proposée, il faut observer que l'on a en général

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

En y substituant ces valeurs et celle de $\sin\alpha\cos\alpha$, on trouve

$$\left.\begin{array}{l}\{A+C-B\sin 2\alpha+(A-C)\cos 2\alpha\}\,y''^2\\ +\{A+C+B\sin 2\alpha-(A-C)\cos 2\alpha\}\,x''^2\\ +2(D'\cos\alpha-E'\sin\alpha)y''+2(D'\sin\alpha+E'\cos\alpha)\,x''.\end{array}\right\}=0.$$

Or, la valeur précédente de tang 2α donne

$$\sin 2\alpha=\frac{\text{tang}\,2\alpha}{\sqrt{1+\overline{\text{tang}\,2\alpha}^2}}=\frac{-B}{\sqrt{B^2+(A-C)^2}},$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\overline{\text{tang}\,2\alpha}^2}}=\frac{A-C}{\sqrt{B^2+(A-C)^2}}.$$

Si l'on représente par M et N les coefficiens de y''^2 et de x''^2, on trouvera, en y substituant ces valeurs,

$$M=A+C+\sqrt{B^2+(A-C)^2},$$
$$N=A+C-\sqrt{B^2+(A-C)^2};$$

et l'équation devient

$$My''^2+Nx''^2+2(D'\cos\alpha-E'\sin\alpha)y''+2(D'\sin\alpha+E'\cos\alpha)x''=0.$$

On voit que les coefficiens M et N seront toujours des quantités réelles, et c'était une conséquence nécessaire de la valeur réelle trouvée pour tang 2α; mais, de plus, on peut toujours faire en sorte que M soit une quantité positive, et il suffit, pour cela, de disposer l'équation de manière que A soit positif; ce qui est toujours possible, en changeant les signes de tous ses termes. En effet, A étant positif, si C l'est pareillement, M sera entièrement composé de quantités positives; et si C est négatif et égal à $-C$, la partie radicale, qui devient $\sqrt{B^2+(A+C)^2}$, l'emportera nécessairement sur la partie rationnelle, qui est alors $A-C$.

252. Nous pouvons donc toujours admettre, dans ce qui va suivre, que M est positif, et nous userons de cette liberté.

En supposant le coefficient de y nul dans l'équation précédente, elle devient tout-à-fait comparable à celle des sections du cône, trouvée dans l'article 97; elle a alors le même nombre de termes, et ils sont composés en x et y, de la même manière : on pourrait donc, d'après cette seule comparaison, conclure déja leur identité.

Mais l'équation générale des sections du cône n'est pas toujours réductible à la forme de l'article 97, parce qu'elle devient impossible dans certaines circonstances où le cône ne peut être coupé par le plan des xy. De même l'équation générale que nous discutons ici a aussi certain cas d'impossibilité, comme nous l'avons déja reconnu : il faut donc voir si ces exceptions répondent aux mêmes circonstances; et, pour cela, il n'y a pas d'autre moyen que d'effectuer entièrement le calcul nécessaire pour ramener l'équation précédente à la forme

$$y^2+\alpha x^2+\beta x=0,$$

que nous avons adoptée dans l'art. 97, et qui ne renferme que des courbes réelles, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole.

253. Pour faire cette réduction, il faut seulement transporter l'origine sur un autre point de la courbe qui soit tel, qu'une des premières puissances de y'' ou de x'' disparaisse. Soient X'' et Y'' les coordonnées de ce point; puisqu'il est sur la courbe, il devra satisfaire à son équation, c'est-à-dire, qu'on aura

$$MY''^2+NX''^2+2(D'\cos\alpha-E'\sin\alpha)Y''$$
$$+2(D'\sin\alpha+E'\cos\alpha)X''=0;$$

et en faisant

$$x'' = X'' + x''',$$
$$y'' = Y'' + y''',$$

l'équation proposée deviendra

$$My'''^2 + Nx'''^2 + 2(MY'' + D' \cos\alpha - E' \sin\alpha) y''' + 2(Nx'' + D' \sin\alpha + E' \cos\alpha) x''' = 0.$$

Pour que le coefficient de y''' disparaisse, il faut qu'on ait

$$MY'' + D' \cos\alpha - E' \sin\alpha = 0;$$

et, en faisant, pour plus de simplicité,

$$2(NX'' + D' \sin\alpha + E' \cos\alpha) = P,$$

l'équation générale sera reduite à

$$My'''^2 + Nx'''^2 + Px''' = 0,$$

résultat tout-à-fait comparable à celui de l'article 97 : mais pour que cette réduction soit possible, il faut prouver que les coordonnées X'' et Y'' de la nouvelle origine seront toujours réelles.

Pour cela, reprenons les équations qui les déterminent, et qui sont

$$MY''^2 + NX''^2 + 2(D' \cos\alpha - E' \sin\alpha) Y'' + 2(D' \sin\alpha + E' \cos\alpha) X'' = 0,$$
$$MY'' + D' \cos\alpha - E' \sin\alpha = 0.$$

La valeur de Y'', donnée par la dernière, est évidemment réelle ; il ne peut y avoir de difficulté que pour celle de X'', qui est donnée par une équation du second degré. Or, en mettant dans cette équation pour Y'' sa valeur, et divisant tous ses termes par N, elle devient

$$X''^2 + 2\frac{(D' \sin\alpha + E' \cos\alpha)}{N} X'' - \frac{(D' \cos\alpha - E' \sin\alpha)^2}{MN} = 0,$$

En la résolvant, on trouve

$$X'' = -\frac{D'\sin\alpha + E'\cos\alpha}{N} \pm \frac{1}{N}\sqrt{\frac{N(D'\cos\alpha - E'\sin\alpha)^2 + M(D'\sin\alpha + E'\cos\alpha)^2}{M}}$$

La réalité des valeurs de X'' dépendra donc du signe de la quantité qui se trouve sous le radical, et comme il a été prouvé plus haut que M est toujours positif, il suffira de considérer le numérateur

$$N(D'\cos\alpha - E'\sin\alpha)^2 + M(D'\sin\alpha + E'\cos\alpha)^2.$$

En développant cette quantité, elle devient

$$(N\cos^2\alpha + M\sin^2\alpha)D'^2 + (N\sin^2\alpha + M\cos^2\alpha)E'^2 - 2(N-M)\sin\alpha\cos\alpha . D'E';$$

ou, ce qui revient au même, en mettant pour $\cos^2\alpha$ et $\sin^2\alpha$ leurs valeurs en $\cos 2\alpha$,

$$\frac{\{N+M+(N-M)\cos 2\alpha\}}{2}D'^2 + \frac{\{N+M-(N-M)\cos 2\alpha\}}{2}E'^2 - (N-M)\sin 2\alpha . D'E'.$$

Or, si l'on se rappelle les valeurs trouvées plus haut pour M et N, on en déduira facilement

$$M + N = 2(A + C)$$
$$N - M = -2\sqrt{B^2 + (A - C)^2},$$

et, de suite,

$$(N - M)\cos 2\alpha = -2(A - C)$$
$$(N - M)\sin 2\alpha = 2B;$$

en sorte qu'avec ces valeurs la quantité proposée devient

$$2CD'^2 + 2AE'^2 - 2BD'E'.$$

Si l'on substitue dans ce résultat pour D' et E' leurs valeurs $2Ab + Ba + D$, $2Ca + Bb + E$, et qu'on se

rappelle que les coordonnées a et b sont assujetties à l'équation

$$Ab^2 + Bab + Ca^2 + Db + Ea + F = 0,$$

on trouvera définitivement qu'il se réduit à

$$AE^2 + CD^2 + FB^2 - BDE - 4AFC.$$

Par conséquent, il est nécessaire et il suffit que cette quantité soit positive, pour que les valeurs de X'' soient réelles. Or, c'est précisément la condition que nous avons trouvée dans l'article 231, pour que l'équation générale du second degré puisse représenter une courbe : si elle est satisfaite, on pourra trouver pour a et b des valeurs réelles; si elle ne pouvait être satisfaite pour une équation représentant une courbe, c'est qu'il faudrait, après avoir changé les signes, l'ordonner par rapport à x. L'équation $y^2 - 2xy - x^2 - 2 = 0$ (n°. 246) en fournit un exemple. Toutes les transformations précédentes pourront subsister, et l'équation générale du second degré pourra se ramener à la forme

$$My^2 + Nx^2 + Px = 0.$$

Ainsi elle ne représentera jamais qu'une ellipse, une parabole, ou une hyperbole : résultat qui complette ce que nous avions à démontrer relativement aux courbes du second ordre.

254. On voit aussi, par cet exemple général, la marche qu'on devra suivre dans chaque cas particulier pour simplifier, par la transformation des coordonnées, les équations que l'on pourrait se proposer de résoudre, et pour les ramener ainsi à la forme précédente. Il faudra d'abord discuter l'équation de la courbe, pour voir si elle est réelle. Alors on déterminera un quelconque de ses points,

et l'on y transportera l'origine; puis on changera la direction des axes, pour faire disparaître le terme xy, et enfin on transportera de nouveau l'origine sur la courbe, de manière à faire disparaître une des premières puissances des variables. La courbe se trouvera ainsi rapportée, comme dans l'article 97, à son axe et à son sommet. Il sera facile de trouver son centre et ses axes, si elle en a.

On pourra même, dans chaque cas particulier, profiter de ce que l'on aura découvert, par la discussion générale, relativement à la nature des courbes proposées, pour arriver plus directement et plus élégamment aux formes simples sous lesquelles nous les avons considérées d'abord. Par exemple, si l'on sait qu'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole, on pourra déplacer l'origine des coordonnées de manière à la mettre au centre de la courbe, et, pour cela, il faudra faire disparaître les premières puissances des variables, puisque la courbe est symétrique autour de son centre. Pour effectuer cette réduction, on fera

$$x = a + x', \quad y = b + y',$$

a et b étant les coordonnées de la nouvelle origine. En substituant ces valeurs dans l'équation générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

on pourra disposer des indéterminées a et b de manière que les premières puissances de x' et de y' disparaissent de la transformée; ce qui donnera les deux équations suivantes

$$\begin{aligned} 2Ab + Ba + D &= 0 \\ 2Ca + Bb + E &= 0, \end{aligned}$$

auxquelles ces quantités devront satisfaire; et alors l'équation de la courbe rapportée à cette origine deviendra

$$Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea+F=0.$$

En effet, sous cette forme, on voit qu'elle est symétrique relativement aux nouvelles coordonnées y' et x'.

Les équations qui existent entre les coordonnées a et b de la nouvelle origine sont du premier degré, et représentent deux lignes droites : ces droites ne pouvant se couper qu'en un seul point, il s'ensuit qu'il n'y a qu'un seul centre dans les courbes du second ordre. En effet, ces équations donnent pour a et b les valeurs suivantes

$$a=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}, \qquad b=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC};$$

et ces valeurs sont uniques : elles deviennent infinies, quand B^2-4AC est nul ; ce qui signifie qu'alors il n'y a pas de centre, ou, en d'autres termes, qu'il est placé à une distance infinie de l'origine. Ce cas est celui de la parabole, comme l'indique l'équation $B^2-4AC=0$, qui forme le caractère de cette courbe. Dans ce cas, les deux droites qui déterminent le centre par leur intersection deviennent parallèles, puisque leur point d'intersection est infiniment éloigné. Si, de plus, un des numérateurs est nul en même tems que B^2-4AC, ces deux suppositions rendent aussi nul l'autre numérateur, et les valeurs précédentes de a et de b deviennent indéterminées ; alors il faut revenir aux équations mêmes qui les déterminent, et y introduire ces suppositions. Or il est facile d'en déduire que, dans ce cas, les deux équations en a et b se réduisent à une seule, et par conséquent ne suffisent pas pour déterminer ces deux quantités. Il y a donc, dans ce cas particulier, une infinité de centres qui sont tous situés sur une même ligne droite : mais aussi, dans ce cas, la courbe

se réduit à deux droites parallèles, comme il est facile de s'en assurer par les méthodes de l'article 238, et tous les centres se trouvent sur la ligne droite qui est intermédiaire entre elles.

Lorsque la courbe sera rapportée à son centre, comme nous venons de le dire, il faudra changer la direction des coordonnées autour de ce centre, de manière à faire disparaître les premières puissances des variables; et alors la courbe se trouvera rapportée à ses axes. Si c'est une hyperbole, on pourra la rapporter à ses asymptotes, par le même procédé.

S'il s'agit d'une parabole qui n'a pas de centre, on ne pourra pas la traiter de cette manière; il faudra alors transporter l'origine au sommet de la courbe, en suivant la marche que nous avons indiquée.

Et c'est pour comprendre tous ces cas dans un seul que nous avons adopté cette marche dans l'article précédent, en ramenant l'équation à ne contenir que les carrés des variables et la première puissance d'une d'entre elles; car cette forme convient également à l'ellipse, à la parabole et à l'hyperbole.

Au reste, il suffira le plus souvent de discuter l'étendue et la forme de la courbe par la méthode générale qui repose sur la considération successive des valeurs de y; on trouvera ainsi autant de points qu'il en faudra pour savoir, dans tous les cas, quelle est sa nature, et comment elle est située. Le reste, s'il est nécessaire, s'achevera par la transformation des coordonnées.

Digitized by Google

DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

255. On a vu dans l'art. 52, que les équations entre trois variables représentent des surfaces, comme celles qui sont entre deux indéterminées représentent des lignes. On classe aussi les surfaces d'après le degré de leurs équations. Ainsi le plan dont l'équation est linéaire, est du premier ordre. Nous ne considérerons ici que les surfaces du second ordre, dont l'équation la plus générale est

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Byz+B'xz+B''xy+Cz+C'y+C''x+F=0 \quad (1);$$

et nous supposerons les coordonnées xy rectangulaires.

Puisque deux des variables x, y, z, peuvent être prises à volonté, ce qui se présente d'abord de plus simple est de résoudre l'équation proposée par rapport à une d'entre elles, par exemple, par rapport à z : alors, en donnant successivement à x et à y toutes les valeurs possibles, on en déduirait les valeurs correspondantes de z, et par conséquent la position de différens points de la surface.

Mais cette méthode, que nous avons employée dans la discussion des lignes courbes, ne serait pas propre à donner une idée nette de la forme et du cours des surfaces, parce que, s'il est facile de saisir par la pensée la liaison d'une seule suite de valeurs, il serait très-difficile d'étendre cette idée à deux dimensions. Pour obvier à cet inconvénient, on imagine une suite de plans coupans menés suivant une certaine loi, par exemple, parallèles à l'un des plans coordonnés. En combinant les équations de ces plans avec celle de la surface proposée, on détermine (n°. 61) leurs intersections mutuelles. La nature de

ces intersections et la manière dont elles se succèdent, font saisir et voir, pour ainsi dire, dans l'espace, la nature de la surface et les divers mouvemens des *Nappes* qui la composent.

Pour donner un exemple de ce procédé, appliquons-le au cas très-simple où l'équation proposée serait

$$z^2 + x^2 + y^2 = R^2.$$

Prenons les plans coupans parallèles au plan des xy; leur équation sera, par le n°. 52, de la forme

$$z = a,$$

a étant une constante : substituant cette valeur de z dans la proposée, on a

$$x^2 + y^2 = R^2 - a^2.$$

Cette équation, qui appartient (n°. 60) à la projection de l'intersection sur le plan des xy, représente, quel que soit a, une circonférence de cercle dont le centre est à l'origine, et dont le rayon est $\sqrt{R^2 - a^2}$: ce rayon est réel tant que a, positif ou négatif, est plus petit que R; il est nul, quand a égale R, et imaginaire, quand a surpasse R. Ainsi, dans le premier cas, l'intersection est une circonférence de cercle ; dans le second, ce cercle se réduit à un point, et au-delà, le plan ne rencontre plus la surface.

L'équation proposée étant symétrique par rapport aux trois variables x, y, z, on obtiendrait des résultats semblables en prenant les plans coupans parallèles à un quelconque des plans coordonnés : chacun de ceux-ci couperait la surface suivant des cercles égaux, et qui auraient pour équation

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad x^2 + z^2 = R^2 \quad y^2 + z^2 = R^2,$$

On peut donc concevoir la surface proposée comme engendrée par le mouvement d'un cercle parallèle au plan des xy, et dont le rayon variable, et représenté par $\sqrt{R^2-z^2}$ est l'ordonnée du cercle suivant lequel le plan des xz, ou des yz, rencontrerait la surface. On reconnaît à cette propriété la génération de la sphère que j'ai choisie pour donner une application simple du procédé général; car, dans ce cas particulier, on peut aisément reconnaître la nature de la surface, en observant que $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ est la distance d'un point quelconque à l'origine des coordonnées : distance qui est constante d'après l'équation précédente ; ce qui caractérise la sphère.

C'est pour plus de simplicité que nous avons choisi les plans coupans parallèles aux plans coordonnés : par cette disposition, les projections des intersections ne diffèrent pas des intersections elles-mêmes. Nous n'aurions pas eu cet avantage en prenant les plans coupans dans les directions quelconques : si, par exemple, nous les eussions menés par l'origine, ils auraient eu des équations de la forme

$$Ax+By+Cz=0;$$

et la combinaison de cette équation avec la proposée eût donné, en éliminant z,

$$(A^2+C^2)\,x^2+2\,ABxy+(B^2+C^2)\,y^2=R^2C^2.$$

Alors la projection de l'intersection sur le plan des xy est une ellipse. On pourrait cependant reconnaître que cette intersection elle-même est une circonférence de cercle, et l'on y parviendrait en la rapportant à des coordonnées prises dans le plan coupant. Je donnerai par la suite des méthodes pour atteindre ce but.

256. En général on peut, à l'aide de ce que nous avons

dit dans le n°. 60, déterminer les intersections d'une surface quelconque par un plan, et il est visible que ces intersections seront en général des courbes du même ordre que la surface : mais, avant d'appliquer ces procédés à l'équation générale du second degré, il faut remarquer qu'une pareille équation n'est pas toujours possible, et qu'il existe des cas où elle ne saurait représenter aucune surface. Pour les déterminer, opérons ici, comme nous l'avons fait n°. 222, sur l'équation du second degré entre deux variables. En résolvant l'équation proposée par rapport à z, et supposant, pour plus de simplicité,

$$B^2-4AA'=a \quad 2(BB'-2AB'')=b \quad B'^2-4AA''=c$$
$$2(BC-2AC')=d \quad 2(B'C-2AC'')=e \quad C^2-4AF=f,$$

elle donne

$$z=-\frac{(By+B'x+C)}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f)}.$$

Pour que la valeur de z soit toujours imaginaire, quels que soient x et y, il faut que la quantité comprise sous le radical soit toujours négative. Or, en supposant x nul, on pourra (n°. 223) donner à y une valeur telle que le signe du résultat ne dépende que de celui de a : on aura donc d'abord, pour première condition de l'imaginarité,

$$B^2-4AA'<0.$$

De plus, pour que la quantité qui est sous le radical conserve toujours son signe négatif, il faut qu'elle ne puisse jamais devenir nulle, et par conséquent qu'en l'égalant à zéro, on n'en tire jamais pour y que des valeurs imaginaires. Or, on voit, par l'art. 231, que cette condition ne peut être remplie, à moins qu'on n'ait

$$b^2-4ac<0 \quad (bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)<0;$$

ce qui exige que les quantités a, c, f, ou

$$B^2-4AA', \quad B'^2-4AA'', \quad C^2-4AF,$$

soient de même signe, et par conséquent négatives, puisque la première doit l'être : pour cela, il faut que les coefficiens $AA'A''$ soient de même signe, sans qu'aucun d'eux soit nul.

En faisant donc, pour plus de simplicité,

$$b^2-4ac=a', \quad bd-2ae=b',$$
$$(bd-2ae)^2-(b^2-4ac)(d^2-4af)=Q,$$

nous aurons les trois conditions

$$a<0, \quad a'<0, \quad Q<0.$$

Lorsqu'elles seront remplies, l'équation proposée sera impossible, et ne représentera aucune surface.

On peut s'assurer aisément de cette vérité, en observant que la quantité

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f$$

peut, d'après l'article 231, être mise sous la forme

$$\frac{1}{4a}\left\{(2ay+bx+d)^2-\frac{1}{a'}(2a'x+b')^2+\frac{Q}{a'}\right\}.$$

Par conséquent, l'équation proposée équivaut à la suivante

$$\left.\begin{array}{l}(2Az+By+B'x+C)^2-\frac{1}{4a}(2ay+bx+d)^2\\ +\frac{1}{4aa'}(a'x+b')^2-\frac{Q}{4aa'}\end{array}\right\}=0;$$

et l'on voit clairement que tous ses termes sont positifs,

quelles que soient les valeurs réelles attribuées aux variables x, y, z, si a, a' et Q, sont négatifs; ce qui rend l'égalité à zéro impossible.

Si Q est nul, a et a' étant toujours négatifs, l'équation ne peut être satisfaite qu'en supposant chacun de ses termes nul en particulier; ce qui donne

$$2Az+By+B'x+C=0 \quad 2ay+bx+d=0 \quad a'x+b'=0.$$

Ces trois équations suffisent pour déterminer les coordonnées x, y, z; et, comme il n'en résulte pour chacune d'elles qu'une valeur, il s'ensuit qu'alors la surface se réduit à un point.

Il est à remarquer que la quantité Q reste la même quand on y change tous les signes des coefficiens a, b, c....

257. Il peut arriver aussi que l'équation proposée soit décomposable en facteurs réels du premier degré, et alors elle représenterait le système de deux plans. Pour cela, il faut que la quantité affectée du signe radical, dans la valeur de z, soit un carré que l'on pourra par conséquent représenter par $(\alpha y+\beta x+\gamma)^2$, α, β, γ, étant des constantes indéterminées : développant cette expression, elle devient

$$\alpha^2y^2+2\alpha\beta xy+\beta^2x^2+2\alpha\gamma y+2\gamma\beta x+\gamma^2;$$

et, en la comparant terme à terme avec la quantité

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f,$$

on a

$$\begin{array}{lll} \alpha^2=a, & \beta^2=c, & \gamma^2=f, \\ 2\alpha\beta=b, & 2\alpha\gamma=d, & 2\gamma\beta=e: \end{array} \quad (A)$$

d'où l'on tire

$$b^2-4ac=0, \quad d^2-4af=0, \quad e^2-4cf=0. \quad (B)$$

Ce qui exige que les quantités a, c, f soient de même signe. Lorsque ces trois équations seront satisfaites, on aura

$$\alpha=\sqrt{a},\quad \beta=\sqrt{c},\quad \gamma=\sqrt{f},$$

les signes des radicaux étant déterminés d'après ceux des quantités b, d, e; et l'équation proposée se résoudra en deux facteurs, qui seront

$$2Az+By+B'x+C\pm\sqrt{a}\left\{y+x\sqrt{\frac{c}{a}}+\sqrt{\frac{f}{a}}\right\}=0.$$

Si les quantités a, c, f, sont positives, ces facteurs représenteront des plans réels : dans le cas contraire, $\sqrt{a}$ sera imaginaire, et l'on devra avoir en même tems

$$2Az+By+B'x+C=0,\qquad y+x\sqrt{\frac{c}{a}}+\sqrt{\frac{f}{a}}=0.$$

Alors la proposée représentera une ligne droite.

Les valeurs de b, d, e, tirées des équations (A), donnent

$$bd-2ae=0.$$

Ainsi, en se reportant au numéro précédent, les quantités que nous avons nommées a', b', Q, sont nulles lorsque l'équation proposée est décomposable en facteurs du premier degré.

Si l'on développe les équations (B), en mettant pour a, b, c leurs valeurs, elles deviennent

$$AB''^2+A'B'^2+A''B^2-BB'B''-4AA'A''=0\quad(1)$$
$$AC'^2+A'C^2+FB^2-BCC'-4AA'F=0\quad(2)$$
$$AC''^2+A''C^2+FB'^2-B'CC''-4AA''F=0\quad(3).$$

Les deux dernières sont celles que l'on obtiendrait en faisant successivement abstraction de x et de y dans la proposée, et écrivant que le résultat est décomposable en

facteurs du premier degré. Il est facile de s'en assurer, én les comparant avec celles de l'art. 243. La première n'est point symétrique avec les deux autres, et cela vient de ce que nous avons résolu l'équation par rapport à z ; ce qui n'a laissé que x et y sous le radical : en la résolvant par rapport à y, on trouverait pour une des trois équations de condition la suivante

$$A'C''^2 + A''C'^2 + FB''^2 - B''CC'' - 4A'A''F = 0 \quad (4).$$

Cette équation, qui ne contient que les coefficiens de x et de y, doit nécessairement être comportée par les trois précédentes : de plus, comme elle contient la lettre B'', qui ne se trouve pas dans les deux dernières, et la lettre F, qui ne se trouve pas dans la première, elle ne peut résulter que de la combinaison de ces trois équations. On peut donc la substituer à une d'entre elles, par exemple, à la première, et l'on aura alors les trois conditions (2) (3) (4), pour que la proposée représente deux plans ou une ligne droite : ces équations de condition pourront même être employées quand une des quantités B, A', A'', qui multiplient les carrés des variables x, y, z, deviendra nulle.

Si l'on voulait parvenir directement aux trois équations (2) (3) (4), il faudrait rendre la proposée homogène et symétrique, en y substituant pour x, y, z ; $\frac{x}{n}$, $\frac{y}{n}$, $\frac{z}{n}$; n étant une nouvelle indéterminée : on trouverait ainsi

$$Az^2 + A'y^2 + A''x^2 + Byz + B'xz + B''xy + Czn + C'yn + C''xn + Fn^2 = 0;$$

et, en résolvant cette équation par rapport à n, on chercherait les conditions qui rendent le polynome décomposable en facteurs.

258. Le principal caractère par lequel nous avons classé

les courbes du second degré, est l'absence ou l'existence des branches infinies. On distingue également, parmi les surfaces du second ordre, celles qui sont renfermées dans un espace limité, et celles dont le cours est indéfini.

Généralement, lorsqu'une surface est terminée dans un espace fini, si l'on mène une droite qui la rencontre en plusieurs points, la portion de cette droite qui est interceptée entre les points d'intersection ne pourra jamais devenir infinie; et il est évident que cette propriété appartient exclusivement à ce genre de surfaces : cherchons les conditions qui l'établissent dans celles du second ordre.

Soient donc

$$x = \alpha z + \beta$$
$$y = \alpha' z + \beta'$$

les équations d'une ligne droite quelconque dans laquelle α, β, α', β', sont des constantes absolument arbitraires qui dépendent de la position de la droite : les points où elle rencontre la surface du second degré

$$Az^2 + A'y^2 + A''x^2 + Byz + B'xz + B''xy + Cz + C'y + C''x + F = 0$$

seront déterminés par le système de ces trois équations (n°. 61). Il faudra donc en tirer, par l'élimination, les valeurs des coordonnées x, y, z; ce qui revient à chercher les intersections de la surface par chacun des plans projetans, et à déterminer ensuite les points communs à ces deux intersections. Ainsi, pour que la surface proposée soit renfermée dans un espace fini, il est nécessaire et il suffit que ces courbes soient toujours fermées, quelle que soit la direction des plans coupans.

Si l'on combine d'abord la première des équations de la droite avec celle de la surface, et qu'on élimine x entre elles, il viendra une équation du second degré qui

appartiendra à la projection, sur le plan des yz, de la courbe suivant laquelle le premier plan projetant rencontre la surface : cette équation sera de la forme

$$a'z^2 + b'zy + c'y^2 + d'z + e'y + f' = 0.$$

Pour qu'elle appartienne à une courbe fermée, il faut, comme on l'a vu n°. 224, que $b'^2 - 4a'c'$ soit une quantité négative : or, sans effectuer entièrement le calcul de l'élimination, il est aisé de voir que l'on a

$$a' = A + B'\alpha + A''\alpha^2, \quad b' = B + B''\alpha, \quad c' = A';$$

ce qui donne

$$(B''^2 - 4A'A'')\alpha^2 + 2(BB'' - 2B'A')\alpha + B^2 - 4AA' < 0.$$

Cette condition devant être remplie, quel que soit α, il est visible que l'on aura d'abord (n°. 223)

$$B''^2 - 4A'A'' < 0.$$

A' et A'' seront par conséquent de même signe, positives par exemple, si nous supposons la première positive, ce qui est permis.

Il faudra ensuite que ce polynome reste toujours négatif, quel que soit α ; ce qui exige qu'en l'égalant à zéro, il ne donne pour α que des valeurs imaginaires : pour cela, il faut qu'on ait

$$(BB'' - 2B'A')^2 - (B^2 - 4AA')(B''^2 - 4A'A'') < 0 \quad (4),$$

ou, en développant et divisant par $4A'$, qui est une quantité positive,

$$AB''^2 + A'B'^2 + A''B^2 - BB'B'' - 4AA'A'' < 0 \quad (5).$$

Cela ne peut avoir lieu qu'en supposant

$$B^2 - 4AA' < 0.$$

Il faut par conséquent que les quantités A, A', A'' soient toutes trois de même signe, c'est-à-dire, positives, sans qu'aucune d'elles soit nulle.

Ces conditions étant satisfaites, la section faite dans la surface par le premier plan projetant de la droite sera une courbe fermée, quelle que soit la direction du plan.

En combinant de la même manière l'équation

$$y = \alpha' z + \beta'$$

du second plan projetant de la droite avec celle de la surface, on trouvera que l'intersection sera une courbe fermée, si l'on a

$$B''^2 - 4A'A'' < 0$$

$$(B'B'' - 2BA'')^2 - (B'^2 - 4AA'')(B''^2 - 4A'A'') < 0 \quad (6);$$

ce qui exige que l'on ait

$$B'^2 - 4AA'' < 0.$$

Mais ces conditions ne diffèrent qu'en apparence des précédentes; car, si l'on développe la formule (6), et qu'on la divise par $4A''$, qui est une quantité positive, elle donnera la formule (5) : ainsi, réciproquement, en multipliant la formule (5) par $4A''$, on retrouvera la formule (6). Par conséquent, la condition $B'^2 - 4AA'' < 0$ est implicitement comprise dans les précédentes. L'analogie fait aisément sentir qu'en multipliant la formule (5) par $4A$, on peut lui donner la forme

$$(BB' - 2AB'')^2 - (B^2 - 4AA')(B'^2 - 4AA'') < 0.$$

Il suit de là que, pour qu'une surface du second degré soit renfermée dans un espace fini, il est nécessaire et il suffit que son intersection, par un plan perpendiculaire à un des plans coordonnés, soit toujours une courbe fermée, quelle

que soit la direction du plan coupant : il est aisé de voir que ce caractère peut servir à déterminer les surfaces finies de tous les ordres.

Cette propriété tient à ce que l'on peut trouver l'intersection d'une droite avec une autre, sans combiner immédiatement l'équation de cette dernière avec celles des deux plans projetans ; car on parvient au même but, en cherchant les points dans lesquels un des plans projetans rencontre la courbe suivant laquelle l'autre a coupé la surface. Il suffit donc, pour que celle-ci soit comprise dans un espace fini, que la courbe dont il s'agit soit toujours fermée, quelle que soit la direction du plan.

Nous conclurons de ce qui précède, qu'une surface du second degré, dont l'équation est

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Byz+B'xz+B''xy+Cz+C'y+C''x+F=0 \quad (7)$$

ne peut être renfermée dans un espace fini, à moins qu'on n'ait entre les coefficiens de cette équation les relations suivantes

$$B^2-4AA'<0 \quad B'^2-4AA''<0 \quad B''^2-4A'A''<0 \quad (A)$$
$$AB''^2+A'B'^2+A''B^2-BB'B''-4AA'A''<0.$$

Mais nous observerons qu'une quelconque des trois premières, prise conjointement avec la dernière, comporte les deux autres.

Pour prendre une idée nette de ce que ces formules représentent, supposons que l'on fasse successivement

$$x=0 \quad y=0 \quad z=0$$

dans l'équation générale des surfaces du second degré; on obtiendra, par ce moyen, trois équations aussi du second degré, qui appartiendront aux sections faites dans la surface

par les trois plans coordonnés : les trois premières des conditions (A) signifient que ces sections, que nous nommerons les *traces de la surface*, sont des courbes fermées. Mais cela ne suffit pas pour que la surface soit elle-même fermée, et il faut encore que la quatrième condition soit remplie. C'est ainsi, par exemple, qu'un cône droit, qui est une surface indéfinie, peut être placé, par rapport à l'origine, de manière que ses intersections par les trois plans coordonnés soient des ellipses.

On voit, par les formules précédentes, que toutes les surfaces du second degré, qui sont de nature à être comprises dans un espace fini, renferment nécessairement dans leur équation les carrés des variables x, y, z; et, en effet, si une de ces variables, z par exemple, ne s'y trouvait qu'à la première puissance, sa valeur serait toujours réelle, quelle que fût celle des autres; et, si elle n'entrait pas du tout dans l'équation, elle serait absolument arbitraire, en sorte que, dans l'un et l'autre cas, la surface s'étendrait indéfiniment dans le sens de cette variable.

259. Considérons maintenant les surfaces du second degré qui s'étendent indéfiniment; mais, pour les discuter avec plus de facilité, et distinguer plus nettement les propriétés qui les caractérisent, cherchons à simplifier l'équation générale, comme nous avons fait dans le cas des courbes planes, en changeant convenablement les coordonnées.

260. Ne faisons d'abord que transporter l'origine. En nommant x' et y' les nouvelles coordonnées, on aura

$$x = x' + \alpha \qquad y = y' + \beta \qquad z = z' + \gamma.$$

En substituant ces valeurs, on peut disposer des indéterminées α, β, γ de manière à faire disparaître les termes

affectés des premières puissances des variables x', y', z'; ce qui donne les trois équations

$$\begin{aligned} 2A\gamma + B\beta + B'\alpha + C &= 0, \\ 2A'\beta + B''\alpha + B\gamma + C' &= 0, \\ 2A''\alpha + B'\gamma + B''\beta + C'' &= 0; \end{aligned} \qquad (2)$$

et, en représentant par L la quantité

$$A\gamma^2 + A'\beta^2 + A''\alpha^2 + B\beta\gamma + B'\alpha\gamma + B''\alpha\beta + C\gamma + C'\beta + C''\alpha + F$$

qui ne contient que des quantités connues, la transformée devient

$$Az'^2 + A'y'^2 + A''x'^2 + Bz'y' + B'z'x' + B''x'y' + L = 0 \quad (3).$$

Cette équation reste la même, quand on y change $+x'$, $+y'$, $+z'$, respectivement en $-x'$, $-y'$, $-z'$. Si donc, par l'origine des coordonnées, on mène une ligne droite dont les équations soient de la forme

$$x' = mz', \qquad y' = nz';$$

les points où elle rencontrera la surface auront leurs coordonnées respectivement égales et de signes contraires : par conséquent, la portion de cette droite interceptée par la surface se trouvera divisée en deux parties égales à l'origine des coordonnées. Cette origine sera donc le *Centre* de la surface, en attribuant à cette expression la signification que nous lui avons donnée dans les courbes du second ordre.

Les équations (2), qui déterminent la position de ce centre, étant linéaires, elles donneront toujours pour α, β, γ des valeurs réelles; mais les coefficiens A, B, C, peuvent avoir entre eux des relations telles, que les valeurs de α, β, γ, deviennent infinies; et alors le centre de la surface sera

infiniment éloigné, circonstance analogue à celle que présente la parabole parmi les sections coniques.

Pour savoir quand cela arrivera, il faut tirer des équations (2) les valeurs de α, β, γ, et examiner les cas où leur dénominateur peut devenir nul. Si l'on calcule ce dénominateur par la méthode ordinaire d'élimination, on aura, en l'égalant à zéro,

$$AB''^2 + A'B'^2 + A''B^2 - BB'B'' - 4AA'A'' = 0 \quad (D).$$

C'est la condition nécessaire pour que le centre de la surface soit infiniment éloigné.

Si cette équation était satisfaite, et qu'on eût en même tems

$$C = 0, \quad C' = 0, \quad C'' = 0,$$

les valeurs de α, β, γ, ne seraient plus infinies : il est aisé de voir qu'alors une quelconque de trois équations (2) serait comportée par les deux autres. Elles ne suffiraient donc plus pour déterminer les trois coordonnées α, β, γ : par conséquent, il y aurait une infinité de centres tous situés sur une même ligne droite qui serait l'intersection de deux plans ayant pour équations

$$2A\gamma + B\beta + B'\alpha = 0,$$
$$2A'\beta + B''\alpha + B\gamma = 0,$$

Dans ce cas, la surface est un cylindre droit à base elliptique ou hyperbolique, comme nous le verrons plus bas, et l'axe de ce cylindre est le lieu de tous les centres.

261. Changeons maintenant la direction des coordonnées dans l'équation

$$Az'^2 + A'y'^2 + A''x'^2 + By'z' + B'x'z' + B''x'y' + L = 0,$$

en les laissant toujours rectangulaires, et cherchons à déterminer le nouveau système de manière à faire disparaître les termes qui contiennent les rectangles des coordonnées; il faudra, pour cela, faire (82)

$$\begin{aligned} x' &= x'' \cos X + y'' \cos X' + z'' \cos X'' \\ y' &= x'' \cos Y + y'' \cos Y' + z'' \cos Y'' \\ z' &= x'' \cos Z + y'' \cos Z' + z'' \cos Z'', \end{aligned}$$

et joindre à ces équations les suivantes

$$\begin{aligned} \cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z &= 1 \\ \cos^2 X' + \cos^2 Y' + \cos^2 Z' &= 1 \\ \cos^2 X'' + \cos^2 Y'' + \cos^2 Z'' &= 1 \end{aligned} \qquad (A)$$

$$\begin{aligned} \cos X \cos X' + \cos Y \cos Y' + \cos Z \cos Z' &= 0 \\ \cos X \cos X'' + \cos Y \cos Y'' + \cos Z \cos Z'' &= 0 \\ \cos X' \cos X'' + \cos Y' \cos Y'' + \cos Z \cos Z'' &= 0 \end{aligned} \qquad (B)$$

ce qui donnera une équation de la forme

$$Mz''^2 + M'y''^2 + M''x''^2 + Nz''y'' + N'z''x'' + N''x''y'' + P = 0.$$

Sans effectuer entièrement le calcul, on peut aisément former les valeurs des coefficiens N, N', N''; et, en les égalant à zéro, on aura les trois équations suivantes

$$\left.\begin{aligned} &2A \cos Z \cos Z' + B (\cos Z \cos Y' + \cos Y \cos Z') \\ &+ 2A' \cos Y \cos Y' + B' (\cos Z \cos X' + \cos X \cos Z') \\ &+ 2A'' \cos X \cos X' + B'' (\cos Y \cos X' + \cos X \cos Y') \end{aligned}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &2A \cos Z \cos Z'' + B (\cos Z \cos Y'' + \cos Y \cos Z'') \\ &+ 2A' \cos Y \cos Y'' + B' (\cos Z \cos X'' + \cos X \cos Z'') \\ &+ 2A'' \cos X \cos X'' + B'' (\cos Y \cos X'' + \cos X \cos Y'') \end{aligned}\right\} = 0 \quad (C)$$

$$\left.\begin{aligned} &2A \cos Z' \cos Z'' + B (\cos Z' \cos Y'' + \cos Y' \cos Z'') \\ &+ 2A' \cos Y' \cos Y'' + B' (\cos Z' \cos Z'' + \cos X' \cos Z'') \\ &+ 2A'' \cos X' \cos X'' + B'' (\cos Y' \cos X'' + \cos X' \cos Y'') \end{aligned}\right\} = 0.$$

On peut, au moyen des neuf équations (A) (B) (C), déterminer les neuf quantités d'où dépend la position des trois axes ; et, en substituant leurs valeurs dans la proposée, elle se réduira à cette forme très-simple

$$Mz''^2 + M'y''^2 + M''x''^2 + L = 0.$$

Mais la possibilité de la transformation dépend de la réalité de ces valeurs.

Pour s'assurer de cette possibilité, il faut observer que les équations (A) (B) (C) restent les mêmes, quand on y change XYZ respectivement en $X'Y'Z'$, ou en $X''Y''Z''$. Ces équations sont donc symétriques par rapport aux trois axes des nouvelles coordonnées $x''y''z''$: par conséquent, il doit être possible de les décomposer en trois systêmes équivalens (A) (A') (A''), dont chacun ne renfermera que les quantités relatives à un de ces axes. Ces trois systêmes devant être encore symétriques, comme les équations (A) (B) (C), un seul de ces systêmes pourra représenter les deux autres, et devra donner pour chacune des inconnues trois valeurs, qui appartiendront aux trois axes des $x''y''z''$.

Pour obtenir ces équations éliminées, multiplions la première des équations (C) par $\cos Y''$, la seconde par $\cos Y'$, et retranchons ces deux produits l'un de l'autre, en faisant, pour plus de simplicité,

$$2A\cos Z + B\cos Y + B'\cos X = M$$
$$2A''\cos Y + B'\cos Z + B''\cos X = P,$$

il viendra

$$\left.\begin{array}{l} M(\cos Y'\cos Z'' - \cos Z'\cos Y'') \\ + P(\cos Y'\cos X'' - \cos X'\cos Y'') \end{array}\right\} = 0 \quad (2).$$

Effectuons la même opération en multipliant par $\cos X''$

et $\cos X'$, et faisons

$$2A' \cos Y + B \cos Z + B'' \cos X = N,$$

il viendra

$$\left.\begin{array}{l} M(\cos X' \cos Z'' - \cos Z' \cos X'') \\ + N(\cos X' \cos Y'' - \cos Y' \cos X'') \end{array}\right\} = 0 \quad (3).$$

Traitant absolument de la même manière les deux premières équations (B), on en tirera les deux suivantes

$$\left.\begin{array}{l} \cos X.(\cos Y' \cos X'' - \cos X' \cos Y'') \\ + \cos Z\ (\cos Y' \cos Z'' - \cos Z' \cos Y'') \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos Y\ (\cos X' \cos Y'' - \cos Y' \cos X'') \\ + \cos Z\ (\cos X' \cos Z'' - \cos Z' \cos X'') \end{array}\right\} = 0$$

Si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$\cos Y' \cos Z'' - \cos Z' \cos Y'' = T$$
$$\cos Y' \cos X'' - \cos X' \cos Y'' = U$$
$$\cos X' \cos Z'' - \cos Z' \cos X'' = V,$$

les quatre équations précédentes deviendront

$$MT + PU = 0 \qquad MV - NU = 0$$
$$T \cos Z + U \cos X = 0 \qquad V \cos Z - U \cos Y = 0.$$

Il faut observer que les quantités T, U, V, qui entrent dans ces expressions, sont les seules qui contiennent des accens : en les éliminant, on aura les deux équations suivantes, qui ne contiendront plus que XYZ,

$$M \cos Y - N \cos Z = 0, \quad M \cos X - P \cos Z = 0,$$

qui comportent la suivante

$$P \cos Y - N \cos X = 0;$$

ou, en développant et mettant pour MNP leurs valeurs,

$$\left.\begin{array}{l}2(A-A')\cos Y\cos Z+B\;(\cos^2 Y-\cos^2 Z)\\ \quad+B'\cos Y\cos X-B''\;\cos X\cos Z\end{array}\right\}=0$$
$$\left.\begin{array}{l}2(A-A'')\cos X\cos Z+B'\;(\cos^2 X-\cos^2 Z)\\ \quad+B\cos X\cos Y-B''\;\cos Y\cos Z\end{array}\right\}=0 \quad (5)$$
$$\left.\begin{array}{l}2(A''-A')\cos Y\cos X+B''(\cos^2 Y-\cos^2 X)\\ \quad+B'\cos Z\cos Y-B\;\cos X\cos Z\end{array}\right\}=0$$

à quoi il faudra joindre

$$\cos^2 X+\cos^2 Y+\cos^2 Z=1.$$

Ces équations éliminées suffisent pour déterminer $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$; et, comme les formules dont nous sommes partis étaient symétriques par rapport aux trois axes des nouvelles coordonnées, on aura, par rapport à chacun d'eux, trois équations semblables aux précédentes, en sorte qu'il suffit de résoudre ces dernières.

Pour y parvenir, on fera

$$\cos X=m\cos Z,\qquad \cos Y=n\cos Z;$$

on a alors

$$\cos Z=\frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}},$$

et les quantités m, n, se trouvent déterminées par les équations

$$2(A-A')\;n+B\;(n^2-1)+B'\;mn-B''m=0$$
$$2(A-A'')\;m+B'\;(m^2-1)+B\;mn-B''n=0.$$

Si l'on prend dans la première la valeur de m, qui est au premier degré, et qu'on la substitue dans la seconde, le terme affecté de n^4 disparaît de lui-même, et il reste pour déterminer n une équation du troisième degré. Cette équation ayant au moins une racine réelle, il en résultera au moins une valeur réelle pour m, et par conséquent pour

chacune des quantités $\cos X$, $\cos Y$, $\cos Z$: ces valeurs vérifieront les équations (5), et il y aura au moins un des axes cherchés qui sera réel.

Supposons que l'on transforme les coordonnées dans l'équation proposée de manière à prendre cet axe pour celui des z, les deux autres axes étant pris, comme on voudra, dans le plan perpendiculaire, et seulement de manière à faire entre eux un angle droit : si l'on applique ensuite à ce système les équations (5), elles devront se trouver satisfaites en faisant $\cos X = 0$, $\cos Y = 0$, $\cos Z = 1$. Cette supposition donnant $B = 0$, $B' = 0$, il s'ensuit que, si l'on effectuait cette transformation, les rectangles yz, xz, des nouvelles coordonnées, disparaîtraient d'eux-mêmes, et l'équation serait ramenée à cette forme,

$$Az^2 + A'y^2 + A''x^2 + B''xy + L = 0;$$

les coefficiens $AA'A''B''L$ étant tous des quantités réelles ; mais, lorsqu'on n'a plus qu'une équation de cette forme, où B et B' sont nuls, les deux premières des équations (5) sont encore satisfaites, en supposant $\cos Z = 0$; ce qui donne des axes perpendiculaires à l'axe des z. La position de ces nouveaux axes est déterminée par la troisième de ces équations, qui devient

$$2(A'' - A') \cos Y \cos X + B'' (\cos^2 Y - \cos^2 X) = 0,$$

ou, comme on a alors

$$\cos^2 X + \cos^2 Y = 1,$$

$$\tang^2 X + \frac{2(A'' - A')}{B''} \tang X - 1 = 0.$$

Le dernier terme de cette équation étant négatif et égal à -1, les deux valeurs de $\tang X$ sont réelles, et les angles auxquels elles répondent sont X et $X + 100°$. Les nouveaux

axes des x et des y, déterminés par les équations (5), seront donc réels ; l'axe des z, que l'on avait trouvé d'abord, et auquel ils sont perpendiculaires, est aussi réel : on aura donc ainsi trois axes réels et rectangulaires, dont le système satisfera aux équations (A) (B) (C) ; c'est-à-dire qu'en y rapportant l'équation générale des surfaces du second ordre, les trois rectangles des coordonnées disparaissent d'eux-mêmes de cette équation.

Quoique ce système de coordonnées soit en général unique pour chaque surface, il pourrait exister entre le coefficient de l'équation proposée des relations telles, que quelqu'une des équations (5) fût satisfaite d'elle-même ; alors les quantités m et n resteraient indéterminées, et il y aurait une infinité de systèmes pareils à ceux que nous considérons : cela arriverait, par exemple, si l'on avait

$$A = A' = A'', \quad B = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0;$$

ce qui suppose

$$z^2 + y^2 + x^2 = R^2.$$

Alors les trois premières équations (5) seraient satisfaites d'elles-mêmes, et il ne resterait qu'à remplir les conditions relatives à la perpendicularité des trois axes ; alors aussi, de quelque manière qu'on change la direction des coordonnées, en les laissant toutefois rectangulaires, comme les équations (5) le supposent, on n'introduirait jamais les rectangles des variables ; c'est ce qu'il est facile de voir directement par les substitutions. Le cas que nous considérons ici est celui de la sphère, et la propriété dont il s'agit a son analogue dans le cercle, comme on l'a vu précédemment.

Si l'on avait simplement

$$A' = A'', \quad B = 0, \quad B' = 0, \quad B'' = 0,$$

une des équations (5) serait satisfaite d'elle-même; mais les deux autres ne pourraient pas l'être, à moins qu'on n'eût $\cos Z = 0$: il faudrait donc alors qu'un des trois axes, celui des x'' par exemple, fût perpendiculaire à l'axe des z ; on aurait ensuite

$$\cos^2 Y + \cos^2 X = 1,$$

c'est-à-dire que les angles X, Y, sont complémens l'un de l'autre; ce qui est une suite de la condition précédente, en vertu de laquelle l'axe dont il s'agit est situé dans le plan des xy. Mais, pour la détermination des autres angles, il faut recourir immédiatement aux équations (C), qui deviennent, dans ce cas,

$$A \cos Z \cos Z' + A' (\cos Y \cos Y' + \cos X \cos X') = 0,$$
$$A \cos Z \cos Z'' + A' (\cos Y \cos Y'' + \cos X \cos X'') = 0,$$
$$A \cos Z' \cos Z'' + A' (\cos Y' \cos Y'' + \cos X' \cos X'') = 0.$$

En les combinant avec les équations (B), elles donnent

$$(A - A') \cos Z \cos Z' = 0,$$
$$(A - A') \cos Z \cos Z'' = 0,$$
$$(A - A') \cos Z' \cos Z'' = 0;$$

et, si on n'a pas $A = A'$, il faudra que deux des trois quantités $\cos Z$, $\cos Z'$, $\cos Z''$, soient nulles ; ce qui met deux des nouveaux axes dans le plan des xy. Comme leur situation dans ce plan reste indéterminée, il y aura une infinité de systêmes de coordonnées rectangulaires qui auront tous le même axe des z, et qui auront la propriété de ne point introduire le rectangle des variables dans l'équation proposée; aussi verrons-nous, par la suite, que la surface représentée par cette équation est formée par la révolution d'une courbe du second degré autour de l'axe des z.

On arriverait à des résultats analogues, si, $BB'B''$ étant

nuls, on supposait $A = A'$, ou $A = A''$: ces cas se traiteraient comme le précédent.

Si, dans les formules de l'article 260, on suppose que l'on en fait préalablement disparaître les rectangles des coordonnées, l'équation que nous avons nommée (B) ne pourra être satisfaite qu'autant qu'une des quantités $AA'A''$ sera nulle. Cette condition, jointe à ce que l'on a déja C, C', C'', nuls, fait disparaître une des trois variables de l'équation de la surface ; et comme cette variable est alors absolument indéterminée, il s'ensuit que la surface est, comme nous l'avons annoncé, un cylindre droit dont les génératrices sont perpendiculaires à la base, qui est une ellipse ou une hyperbole, située dans un des plans coordonnés. Le cas de l'hyperbole comprenant celui des deux lignes droites, le plan se trouve compris parmi ces cylindres.

Des surfaces du second ordre rapportées à leurs axes.

262. Il résulte de cette discussion que toutes les surfaces du second degré qui ont un centre, sont renfermées dans l'équation

$$Mx^2 + M'y^2 + M''x^2 + L = 0 \qquad (1).$$

Mais on peut aussi les réunir avec celles qui n'ont point de centre, dans une formule très-simple. En effet, si l'on change dans l'équation générale la direction des coordonnées sans déplacer leur origine, et en les laissant toujours rectangulaires, on pourra disposer des indéterminées dépendantes de cette direction de manière à faire disparaître les rectangles $y'z'$, $x'z'$, $x'y'$, des nouvelles variables ; car on aura, pour cela, les mêmes conditions que dans les

numéros précédens. Par cette opération, la proposée sera ramenée à la forme

$$Mz'^2+M'y'^2+M''x'^2+Kz'+K'y'+K''x'+F=0.$$

Alors, si l'on transporte l'origine des coordonnées sans changer la direction des nouveaux axes, ce qui se fera en supposant

$$z'=z''+a,\quad y'=y''+a',\quad x'=x''+a'',$$

on pourra disposer des indéterminées $a\,a'a''$ de manière à faire disparaître le terme tout connu; ce qui donnera

$$Ma^2+M'a'^2+M''a''^2+Ka+K'a'+K''a''+F=0 \quad (2).$$

Il existera toujours pour $a\,a'a''$ des valeurs réelles qui satisferont à cette condition, excepté dans le seul cas où la proposée serait elle-même impossible. Ainsi, en supprimant les accens dont nous n'avons plus besoin, et faisant, pour plus de simplicité,

$$2Ma+K=H,\quad 2M'a'+K'=H',\quad 2M''a''+K''=H'',$$

toutes les surfaces du second ordre se trouveront comprises dans l'équation

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+Hz+H'y+H''x=0 \quad (3),$$

l'origine des coordonnées étant sur un point de la surface.

L'équation (2) ne détermine qu'une des coordonnées $a\,a'a''$ de la nouvelle origine; on peut en conséquence disposer des deux autres pour rendre nuls deux des coefficiens $HH'H''$; mais cette réduction n'est applicable qu'à celles des variables dont le carré se trouve aussi dans l'équation; car, si M, par exemple, était nul, l'indéterminée a disparaîtrait de la valeur de H, qui se réduirait alors à une quantité toute connue.

Cette circonstance nous fournit un moyen très-simple de reconnaître dans l'équation (3) les surfaces qui n'ont pas de centre; car, ces surfaces ne pouvant se ramener à la forme de l'équation (1), si on essaie de déterminer les arbitraires $\alpha\alpha'\alpha''$ de manière à ce que les premières puissances des trois variables disparaissent en même tems, quelques-unes de ces quantités devront devenir infinies dans le cas des surfaces dépourvues de centre : or on aurait pour les déterminer, les équations

$$2M\alpha+K=0,\quad 2M'\alpha'+K'=0,\quad 2M''\alpha''+K''=0.$$

Il faudrait donc qu'une au moins des trois quantités $MM'M''$ fût nulle, celle qui lui correspond parmi les quantités $KK'K''$ ne l'étant pas. Ainsi, quand nous voudrons considérer dans l'équation (3) les surfaces dépourvues de centre, nous devrons supposer que cette équation a perdu quelques-uns des termes qui contiennent les carrés des variables; modification analogue à celle qu'offre la parabole dans les sections coniques.

263. L'équation générale étant ainsi ramenée, dans tous les cas, à sa forme la plus simple, examinons plus particulièrement la nature des diverses surfaces qu'elle représente, en commençant d'abord par celles qui ont un centre, et qui sont par conséquent comprises dans la formule

$$Mz^2+M'y^2+M''x^2+L=0.$$

Cette équation, étant résolue par rapport à une quelconque des trois variables xyz, donnerait pour elle deux valeurs égales et de signes contraires. Il suit de là que chacun des plans coordonnés divise ces surfaces en deux portions égales et symétriques. Les traces de la surface sur ces plans se nomment *Sections principales*, et les axes

rectangulaires qui déterminent ce système de coordonnées s'appellent *Axes principaux.*

Si nous coupons la surface par des plans parallèles aux plans coordonnés, ce qui revient à supposer successivement x, y, z, constantes, les intersections, qui seront des courbes du second degré rapportées à leurs axes et au centre, détermineront la forme et le cours de la surface. La nature de ces intersections dépendra évidemment des signes des coefficiens $MM'M''$: or, en supposant M positif, ce que nous ferons toujours, il peût arriver qu'on ait

M' et M'' positifs,
M' positif M'' négatif,
M' négatif M'' positif,
M' et M'' négatifs.

Les trois derniers cas donneront toujours deux coefficiens de même signe, le troisième étant de signe différent: ils rentreront par conséquent les uns dans les autres, et conduiront aux mêmes résultats, en changeant convenablement les variables les unes dans les autres. Il suffira par conséquent de considérer séparément le premier cas et le dernier.

264. $MM'M''$ étant positifs, si l'on fait successivement

$$x=\alpha,\qquad y=\beta,\qquad z=\gamma,$$

$\alpha\beta\gamma$ étant des constantes, les intersections de ces plans avec les surfaces auront pour équations

$$Mz^2+M'y^2+M''\alpha^2+L=0,$$
$$Mz^2+M''x^2+M'\beta^2+L=0,$$
$$M'y^2+M''x^2+M\gamma^2+L=0.$$

Toutes ces intersections seront alors des ellipses qui auront leurs centres sur les axes des xyz. Les traces de la surface

s'obtiendront en faisant $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, et elles auront pour équations

$$M z^2 + M' y^2 + L = 0,$$
$$M z^2 + M'' x^2 + L = 0,$$
$$M' y^2 + M'' x^2 + L = 0.$$

Si L est positif, toutes les intersections parallèles aux plans coordonnés seront imaginaires, ainsi que la surface; si L est nul, elles se réduiront à un seul point, qui sera l'origine des coordonnées; enfin si L est négatif et égal à $-L'$, elles seront réelles tant que les quantités

$$-L' + M'\alpha^2, \quad -L' + M''\beta^2, \quad -L' + M\gamma^2,$$

seront négatives; elles se réduiront chacune à un point, quand ces quantités deviendront nulles, et deviendront imaginaires, ainsi que la surface au-delà de cette limite. Ainsi, dans le cas que nous considérons, la surface est fermée : la nature de ses intersections lui a fait donner le nom d'*Ellipsoïde*.

La construction de cette surface se déduit aisément des considérations précédentes (fig. 100). En effet, BC, CD, DB, représentant ses trois sections principales, la section $B'D'$, faite par un plan $B'PD'$ parallèle à celui des yz, sera une ellipse qui aura son centre au point P, et dont les axes seront les ordonnées PB', PD', menées par ce point aux deux sections principales situées dans les plans des xz et des xy. Pour chaque point M' pris sur la droite PD', l'ordonnée $M'M$ de l'ellipse $B'D'$ sera celle de la surface. Nous n'avons représenté dans la figure que la portion qui est renfermée dans l'angle trièdre des coordonnées positives.

En faisant $y = 0$ et $z = 0$, dans l'équation de cet ellipsoïde, la valeur de x représente l'abscisse AC des points

où l'axe des x rencontre la surface : on trouve ainsi

$$AC = \pm \sqrt{\frac{-L}{M''}}.$$

Cette double valeur indique deux points d'intersection situés de part et d'autre, et à des distances égales de l'origine des coordonnées. On trouvera de même, en faisant successivement $y = 0$ et $x = 0$; puis $x = 0$ et $z = 0$,

$$AB = \pm \sqrt{\frac{-L}{M}}, \qquad AD = \pm \sqrt{\frac{-L}{M'}}.$$

Le double de ces valeurs forme ce qu'on appelle les axes de la surface : on voit qu'ils ne sont réels, que si L est négatif.

L'équation de l'ellipsoïde prend une forme très-élégante lorsqu'on y introduit ces axes. Si l'on représente le premier par A, le second par B le troisième par C, on aura

$$A^2 = -\frac{L}{M}, \quad B^2 = -\frac{L}{M'}, \quad C^2 = -\frac{L}{M''};$$

et, en tirant de ces rapports les valeurs de $MM'M''$, l'équation de la surface devient

$$B^2C^2z^2 + A^2C^2y^2 + A^2B^2x^2 = A^2B^2C^2;$$

sous cette forme, on voit aisément que les sections principales sont des ellipses dont les axes sont A et B, A et C, B et C.

Prenons les plans coupans perpendiculaires au plan des xy; et, passant par z, leur équation sera

$$y = ax,$$

ou, en prenant pour coordonnées l'angle NAC et le rayon

AN (fig. 101), que nous représenterons respectivement par φ et r,

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de la surface on aura celle de l'intersection rapportée aux coordonnées r et z, qui sera

$$Mz^2 + r^2(M'\sin^2\varphi + M''\cos^2\varphi) + L = 0.$$

Elle représente des ellipses différentes, suivant les différentes valeurs de φ : si $M' = M''$, les axes B et C deviennent égaux, l'angle φ disparaît, et l'on a simplement

$$Mz^2 + M'r^2 + L = 0.$$

Toutes les sections faites dans la surfaces par des plans menés par l'axe des z sont donc alors égales entre elles et aux deux premières sections principales; la troisième devient une circonférence de cercle, et il en est de même de toutes les intersections parallèles au plan des xy: la surface est donc alors formée par la révolution de l'ellipse BC ou BD autour de l'axe des z. On voit, par ce procédé, qu'en général, pour qu'une surface soit de révolution autour de l'axe des z, il faut que x et y entrent dans son équation, de manière que z n'y soit fonction que de r ou de $x^2 + y^2$.

La supposition de $M = M'$ ou de $M = M''$ donnerait des *Ellipsoïdes* de révolution autour des autres axes. Enfin, si $M = M' = M''$, les trois axes A, B, C sont égaux; l'équation de la surface devient

$$z^2 + x^2 + y^2 + \frac{L}{M} = 0.$$

Elle est alors de révolution par rapport aux trois axes : on reconnaît aisément la sphère à cette propriété.

Généralement, à mesure que les quantités $M\,M'\,M''$ diminuent, L restant le même, les axes qui leur correspondent augmentent, et l'ellipsoïde s'étend davantage (fig. 100). Enfin, si une d'elles, M'' par exemple, devient nulle, les deux autres restant finies et positives, l'axe AC devient infini : alors l'ellipsoïde se change en un cylindre dont l'axe se confond avec celui des x, et dont l'équation est

$$Mz^2 + M'y^2 + L = 0.$$

La base de ce cylindre est l'ellipse BD située dans le plan de zy, et la coordonnée x devient arbitraire; c'est pourquoi elle disparaît de l'équation de la surface.

On voit de nouveau, par cet exemple, qu'en général une équation qui ne renferme que deux des trois variables x, y, z, représente un cylindre lorsqu'elle est prise dans toute sa généralité. C'est ainsi que l'équation d'un plan perpendiculaire à un des plans coordonnés se réduit à l'équation de sa trace sur ce plan.

Si aux suppositions précédentes on ajoute que $M = M'$, l'ellipse BD devient une circonférence de cercle; et l'on a alors le cylindre droit à base circulaire, tel qu'on le considère dans les élémens de géométrie.

Enfin, si M' est nul, l'équation se réduit à

$$Mz^2 + L = 0,$$

ce qui donne

$$z = \pm\sqrt{\frac{-L}{M}},$$

elle représente alors deux plans parallèles au plan des xy et situés de part et d'autre de ce plan, à la distance AB.

265. Considérons maintenant le cas où M' et M'' sont négatifs, M étant positif. Dans ce cas, l'équation de la surface est

$$Mz^2 - M'y^2 - M'' x^2 + L = 0 ;$$

et les intersections parallèles aux plans coordonnés ont pour équations

$$Mz^2 - M'y^2 - M''\alpha^2 + L = 0,$$
$$Mz^2 - M''x^2 - M'\beta^2 + L = 0,$$
$$M'y^2 + M''x^2 - M\gamma^2 - L = 0.$$

Les deux premières sont des hyperboles, les dernières sont des ellipses : on a alors pour les traces de la surface

$$Mz^2 - M'y^2 + L = 0, \quad Mz^2 - M''x^2 + L = 0,$$
$$M'y^2 + M''x^2 - L = 0.$$

Les intersections parallèles aux plans des xz et des yz sont toujours réelles ; il n'en est pas de même des intersections parallèles au plan des xy; elles ne peuvent être toujours réelles que lorsque L est une quantité positive : si L est négatif et égal à $-L'$, elles seront imaginaires pour toutes les valeurs de γ, qui rendront la quantité $L' - M\gamma^2$ positive ; quand cette quantité sera nulle, elles se réduiront à un point, et au-delà elles seront toujours réelles. Ainsi, dans ces deux cas, la surface s'étend indéfiniment dans tous les sens; mais sa forme n'est pas la même.

Lorsque L est positif (fig. 102), les deux sections principales, qui sont des hyperboles, ont pour second axe l'axe des z : elles sont donc placées comme le représente la figure 102 : alors tous les plans parallèles à celui des xy rencontrent la surface suivant des ellipses.

En cherchant, comme dans l'article 264, les intersections de cette surface par les lignes des xyz, on trouvera les trois axes, dont les deux premiers seront réels, et le troisième imaginaire : si on les représente respectivement par A, B, $C\sqrt{-1}$, et qu'on introduise ces valeurs dans

l'équation de la surface, elle prend la forme suivante

$$A^2B^2z^2 - A^2C^2y^2 - B^2C^2x^2 - A^2B^2C^2 = 0.$$

Lorsque L est négatif au contraire, les hyperboles résultantes des sections principales ont pour premier axe l'axe des z; elles sont donc placées comme le représente la figure 103 : alors la surface est imaginaire entre B et B'; par conséquent, les plans parallèles au plan des xy ne la rencontrent point dans cet intervalle, au-delà duquel ils donnent constamment des ellipses.

Dans ce cas, si l'on cherche les trois axes de la surface, relativement aux xyz, on trouvera le dernier réel, et les deux autres imaginaires. En les représentant respectivement par $A\sqrt{-1}$, $B\sqrt{-1}$, et C, l'équation de la surface deviendra

$$A^2B^2z^2 - A^2C^2y^2 - B^2C^2x^2 + A^2B^2C^2 = 0.$$

On voit maintenant en quoi diffèrent ces deux surfaces que l'on nomme *Hyperboloïdes*.

Lorsque $M' = M''$, on a $A = B$; elles deviennent toutes deux de révolution autour de l'axe des z.

Si M'' devient nul, L ne l'étant pas, AC devient infini, et l'équation se réduit à

$$Mz^2 - M'y^2 + L = 0.$$

Elle représente alors un cylindre perpendiculaire au plan des zy, et dont la base ou la section par ce plan est une hyperbole. La situation de cette base, et par conséquent celle du cylindre, dépend du signe de L.

A mesure que L positif ou négatif diminue, l'intervalle BB' (fig. 103) et l'ellipse CDD' (fig. 102) se resserrent; enfin, quand L est nul, les points B et B' se confondent

et l'ellipse CDD' se réduit à un point qui est l'origine même des coordonnées. Les hyperboles données par les plans des xz et des yz deviennent des droites, et les hyperboloïdes se réduisent tous deux à un cône qui ressemble au cône droit des élémens de géométrie, à cela près que sa base est une ellipse; son centre est à l'origine des coordonnées : dans ce cas, on a l'équation

$$Mz^2 - M'y^2 - M''x^2 = 0.$$

Les sections de la surface par des plans parallèles aux plans des xz ou des yz, sont encore des hyperboles qui ont leur centre sur l'axe des y ou sur l'axe des x. On pourrait donc concevoir encore ce cône comme ayant pour base une hyperbole située dans un plan parallèle à un des deux précédens; et alors il serait engendré par le mouvement d'une ligne droite assujettie à passer toujours par l'origine des coordonnées, et par des points différens de cette hyperbole. Si M'' est nul, ce cône se réduit à deux plans passant par l'origine des coordonnées, et perpendiculaires au plan des yz.

On peut encore s'assurer que la surface précédente est conique, en menant les plans coupans par l'axe des z : alors ils auront pour équation

$$y = x \tang \phi;$$

ce qui donne

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Ces valeurs, substituées dans l'équation des hyperboloïdes, donneront pour l'équation de l'intersection

$$Mz^2 - r^2 (M' \sin^2 \varphi + M'' \cos^2 \varphi) + L = 0,$$

qui appartient en général à l'hyperbole, mais qui, dans le cas où $L = 0$, représente deux lignes droites menées par

l'origine; ce qui est le caractère des surfaces coniques, puisqu'elles sont engendrées par le mouvement d'une droite assujettie à toucher toujours une courbe donnée, et à passer toujours par un même point. Ici les droites correspondantes à un même plan coupant font des angles égaux avec l'axe des z; ce qui tient à ce que l'axe du cône passe par le centre de l'ellipse qui lui sert de base, et est perpendiculaire au plan qui la contient.

Tant que M' et M'' sont différentes l'une de l'autre, les droites données par l'équation

$$Mz^2 - r^2 (M' \sin^2 \varphi + M'' \cos^2 \varphi) = 0,$$

font des angles différens avec l'axe des z suivant les valeurs de φ : mais, lorsque $M' = M''$; on a

$$Mz^2 - r^2 M' = 0;$$

l'angle φ disparaît, et toutes les génératrices font des angles égaux avec l'axe des z : ainsi, dans ce cas, la surface devient un cône droit à base circulaire.

266. Le cône que nous venons de considérer est, par rapport aux hyperboloïdes, ce que sont les asymptotes de l'hyperbole par rapport à cette courbe. En effet, si l'on représente par z, z', les coordonnées respectives de ces deux surfaces pour les mêmes valeurs de x et de y, on aura

$$z^2 = \frac{M'y^2 + M''x^2}{M}, \qquad z'^2 = \frac{M'y^2 + M''x^2 - L}{M};$$

ce qui donne

$$z - z' = \frac{L}{M(z + z')}.$$

La différence entre ces ordonnées supposées de même signe sera positive ou négative, suivant le signe de L : par

conséquent, le cône sera intérieur à l'hyperboloïde, si L est positif ; extérieur, si L est négatif. Cette différence sera d'autant plus petite, que les valeurs des coordonnées $z'z$ seront plus grandes : ainsi le cône approchera toujours de plus en plus de chacun des hyperboloïdes, sans pouvoir jamais les atteindre.

267. Les hyperboloïdes ont encore plusieurs propriétés remarquables qui les rapprochent des surfaces coniques. Si l'on considère les hyperboles

$$Mz^2 - M'y^2 - M''\alpha^2 + L = 0,$$

qui sont données par les plans coupans perpendiculaires à l'axe des x, on voit qu'en supposant L positif, elles auront leur second axe parallèle aux z tant que

$$-M''\alpha^2 + L$$

sera une quantité positive; elles se réduiront à des lignes droites, quand cette quantité sera nulle, ce qui arrivera à l'extrémité de l'axe AC (fig. 102), et elles auront ensuite leur premier axe parallèle à celui des z (fig. 103). On peut suivre la même marche sur les hyperboles parallèles aux plans des xz, et on trouvera également que le plan mené à l'extrémité de l'axe AD, perpendiculairement à l'axe des y, rencontre aussi la surface suivant deux lignes droites. Ceci est un cas particulier d'une propriété plus générale que nous développerons par la suite.

268. Reprenons maintenant l'équation générale

$$Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + Hz + H'y + H''x = 0 \qquad (2).$$

Pour en déduire les surfaces dépourvues de centre, il faudra supposer quelqu'un des trois coefficiens M, M', M'', égal à zéro : ces coefficiens ne peuvent cependant pas être tous

supposés nuls à-la-fois, car alors la surface ne serait plus qu'un plan. Il y aura donc en tout deux cas à examiner, suivant qu'une seule ou deux d'entre les quantités $MM'M''$ seront nulles. Nous allons discuter ces deux cas, en supposant que le terme Mz^2 reste dans l'équation, le coefficient M étant positif. Il suffira de changer convenablement les variables xyz les unes dans les autres, pour en déduire les résultats qui auraient lieu, si M était égal à zéro.

Supposons d'abord M'' nul, M' ne l'étant point : alors, d'après ce qui a été dit dans l'article 262, on pourra transporter les coordonnées parallèlement à elles-mêmes, de manière à rendre H et H' nuls. L'équation sera donc réduite à la forme

$$Mz^2 + M'y^2 + H''x = 0.$$

Les sections parallèles aux plans des yz, des xz et des xy, seront

$$\begin{aligned} Mz^2 + M'y^2 + H''\alpha &= 0, \\ Mz^2 + H''x + M'\beta^2 &= 0, \\ M'y^2 + H''x + M\gamma^2 &= 0. \end{aligned}$$

Les deux dernières, qui représentent des paraboles, seront toujours réelles, les autres seront des ellipses ou des hyperboles, selon que M et M' seront de même signe ou de signe contraire. Les sections principales de la surface auront pour équations

$$Mz^2+M'y^2=0, \quad Mz^2+H''x=0, \quad M'y^2+H''x=0;$$

et, suivant le signe de M', la première se réduira à un point, ou représentera deux lignes droites.

Supposons d'abord M' positif, ainsi que M. Les sections parallèles au plan des yz ne seront réelles qu'autant que H'' et α seront de signe contraire. La surface ne s'étendra donc

que d'un seul côté du plan des yz; savoir, du côté positif, si H'' est négatif; de l'autre, s'il est positif: cette dernière disposition est représentée dans la figure 104; on y reconnaît aisément l'ellipsoïde de la figure 100, dont deux sections principales sont devenues des paraboles.

Prenons maintenant M' négatif; l'équation de la surface devient

$$Mz^2 - M'y^2 + H''x = 0,$$

et les sections principales seront

$$Mz^2 - M'y^2 = 0, \; Mz^2 + H''x = 0, \; M'y^2 - H''x = 0.$$

Celles qui sont paraboliques auront leurs branches dirigées en sens contraire, et leur sommet à l'origine des coordonnées (fig. 105). En général, les sections parallèles au plan des yz seront des hyperboles $BB'B''$, $CC'C''$, qui auront leur centre dans l'axe des x; mais, d'un côté de ce plan, elles auront leur premier axe Bb parallèle aux z, et de l'autre, elles auront le premier axe Cc parallèle aux y. Ces directions différentes se réunissent dans le plan des yz, où les sections hyperboliques se réduisent à deux lignes droites AL, AL', comme le représente la figure 105, où l'on a supposé H'' positif. En général, il est aisé de voir que le signe H'' n'influe point sur la forme de la surface, mais seulement sur sa position par rapport aux plans coordonnés. Il est remarquable que les hyperboles représentées par les équations

$$Mz^2 - M'y^2 + H''x = 0,$$

et qui sont par conséquent les projections sur le plan des yz des intersections parallèles à ce plan, ont pour asymptotes les lignes droites AL, AL', dont l'équation est

$$Mz^2 - M'y^2 = 0,$$

sont des lignes droites parallèles entre elles, et à la trace de la surface sur ce même plan. Il est aisé de reconnaître à ces caractères que la surface dont il s'agit est un cylindre parabolique dont les génératrices sont parallèles au plan des xy, les projections de ces génératrices sur ce plan faisant avec l'axe des x un angle qui a pour tangente trigonométrique $\frac{H''}{H'}$.

D'après ce que nous avons dit sur la nature des surfaces cylindriques, il est clair que, si nous transformons les coordonnées de manière à prendre un des axes parallèles aux génératrices, une des trois variables x, y, z disparaîtra d'elle-même. Pour cela, il faudra conserver l'axe des z, et changer seulement ceux des x et des y, à l'aide des formules

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

En effet, en substituant ces valeurs dans l'équation de la surface, elle devient

$$Mz^2 + (H'\cos\alpha - H''\sin\alpha)y' + (H'\sin\alpha + H''\cos\alpha)x' = 0.$$

La variable x disparaîtra en faisant

$$H'\sin\alpha + H''\cos\alpha = 0;$$

ce qui donne

$$\tang\alpha = -\frac{H''}{H'};$$

et le nouvel axe des x devient parallèle à la droite qui a pour équation

$$H'y + H''x = 0,$$

laquelle est une des génératrices de la surface.

270. En coupant les surfaces du second degré par des

plans diversement inclinés, les intersections sont des courbes du second ordre : on peut aisément reconnaître leur nature, en les rapportant à des coordonnées prises dans le plan coupant lui-même.

Pour cela, reprenons les formules générales

$$x=mx'+m'y'+m''z', \quad y=nx'+n'y'+n''z', \\ z=px'+p'y'+p''z',$$

qui servent à la transformation des coordonnées. Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation d'une surface, cette surface se trouvera rapportée aux $x'y'z'$, et, pour trouver son intersection par un plan donné, il suffira de combiner son équation avec celle de ce plan. Or, si les coordonnées $x'y'$ sont prises dans le plan coupant lui-même, la troisième coordonnée z' lui sera perpendiculaire, et l'équation du plan sera $z'=0$. Ainsi, pour trouver l'équation de son intersection avec la surface, il suffira de faire z' nul dans cette dernière, après l'avoir transformée.

Ou, ce qui revient au même, il suffira d'y substituer pour xyz les valeurs suivantes

$$x=mx'+m'y', \quad y=nx'+n'y', \quad z=px'+p'y',$$

que l'on obtient en supposant z' nul.

Il ne reste plus qu'à déterminer les coefficiens mm', nn', pp', d'après la position des axes dans le plan coupant. Pour plus de simplicité, nous supposerons que les x sont comptées sur la ligne AX' (fig. 106), qui représente la trace de ce plan sur celui des xy, et nous prendrons pour axe des y' une droite AY' menée dans ce plan perpendiculairement à cette trace : alors, si nous commençons par considérer les points situés sur l'axe AX', pour lequel y' est nul, les valeurs de xyz deviendront

$$x = mx', \quad y = nx', \quad z = px'.$$

L'axe AX' étant situé dans le plan des xy, si l'on nomme φ l'angle CAX, on aura pour les points situés sur cet axe

$$x = x' \cos\varphi, \quad y = x' \sin\varphi, \quad z = 0,$$

et par conséquent

$$m = \cos\varphi, \quad n = \sin\varphi, \quad p = 0.$$

Relativement à l'axe des y', on aura $x' = 0$; ce qui donne

$$x = m'y', \quad y = n'y', \quad z = p'y'.$$

Soit M un quelconque des points qui y sont situés. Si l'on mène MM', $M'P'$, respectivement parallèles aux axes des z et des y, MM' sera z, $P'M'$, $-y$; AP', x, et AM, y'; l'angle MAM' sera celui que fait le plan donné avec celui des xy : en le nommant θ, on aura

$$z = y' \sin\theta, \quad AM' = y'\cos\theta,$$
$$y = -AM' \cos\varphi = -y' \cos\theta \cos\varphi,$$
$$x = AM' \sin\varphi = y' \cos\theta \sin\varphi;$$

ce qui donne

$$m' = \cos\theta \sin\varphi, \quad n' = -\cos\theta\cos\varphi, \quad p' = \sin\theta;$$

et, en réunissant ces deux valeurs, on en tire

$$x = x' \cos\varphi + y' \cos\theta \sin\varphi,$$
$$y = x' \sin\varphi - y' \cos\theta \cos\varphi, \quad z = y' \sin\theta.$$

Ces formules serviront à rapporter les points d'un plan à des axes rectangulaires qui y seront situés.

271. Jusqu'ici nous n'avons changé que la direction des axes : si l'on voulait aussi déplacer l'origine, il suffirait d'ajouter aux expressions précédentes les coordonnées a, b, c

de l'origine nouvelle (n°. 81). On aura ainsi pour xyz ces valeurs générales

$$x = a + x' \cos\varphi + y' \cos\theta \sin\varphi\,,$$
$$y = b + x' \sin\varphi - y' \cos\theta \cos\varphi\,,$$
$$z = c + y' \sin\theta\,,$$

dans lesquelles a, b, c représentent les coordonnées d'un point quelconque pris dans le plan coupant. Ce plan se trouve aussi déterminé par trois conditions, de passer par ce point, de faire avec le plan des xy un angle θ, et de couper ce même plan suivant une ligne droite qui fasse un angle φ avec l'axe des x.

272. En substituant ces valeurs dans l'équation générale

$$Mz^2 + M'y^2 + M''x^2 + Hz + H'y + H''x = 0\,,$$

qui comprend toutes les surfaces du second ordre, on aura l'équation de l'intersection qui sera du second degré en x' y', et on pourra déterminer sa nature d'après les méthodes que nous avons données.

On pourra même disposer des indéterminées, d'où dépend la position du plan coupant, pour obtenir les diverses intersections qui seront compatibles avec la nature de la surface : si, par exemple, on demande que l'intersection soit une circonférence de cercle, il suffira, pour cela, que les coefficiens de y'^2 et x'^2 soient égaux et de même signe, celui des $x'y'$ étant nul; et l'on verra aisément que ces conditions donnent les deux équations suivantes

$$M\sin^2\theta + M'\cos^2\theta\cos^2\varphi + M''\cos^2\theta\sin^2\varphi - M'\sin^2\varphi - M''\cos^2\varphi = 0 \quad (2),$$
$$\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta = 0 \quad (3),$$

qui doivent servir à déterminer les angles θ et φ.

La seconde est satisfaite en supposant $\cos\theta = 0$; ce qui

donne $\sin\theta = 1$: cette valeur, substituée dans la première, donne

$$M - M' \sin^2\varphi - M'' \cos^2\varphi = 0;$$

d'où l'on tire

$$\tang\varphi = \pm\sqrt{\frac{M'' - M}{M - M'}}.$$

Alors le plan coupant est perpendiculaire au plan des xy: cette valeur de $\tang\varphi$ n'est réelle qu'autant que la quantité

$$\frac{M'' - M}{M - M'}$$

est positive. Ainsi, dans ce cas seulement, la supposition $\cos\theta = 0$ est admissible : cela n'a pas lieu, par exemple, quand $M' = M''$. Alors, en effet, la surface est de révolution autour d'un axe parallèle à l'axe des z, comme on peut aisément le voir en transportant les coordonnées x et y parallèlement à elles-mêmes, et il devient impossible de la couper suivant un cercle par un plan parallèle à cet axe, à moins qu'on n'ait aussi $M = M' = M''$; ce qui est le cas de la sphère.

L'équation (3) est encore satisfaite, en faisant

$$\sin\varphi = 0 \qquad \text{ou} \qquad \cos\varphi = 0.$$

La première supposition donne le plan coupant perpendiculaire au plan des yz; la seconde le rend perpendiculaire à celui des xz. Dans le premier cas, l'on aura

$$\tang\theta = \pm\sqrt{\frac{M' - M''}{M'' - M}};$$

dans le second;

$$\tang\theta = \pm\sqrt{\frac{M'' - M'}{M' - M}}.$$

Chacune de ces valeurs de θ ne sera admissible qu'autant que les quantités qui s'y trouvent affectées du signe radical seront positives. Or, il est aisé de voir qu'en prenant M positif, ce qui est toujours permis, les trois quantités

$$\frac{M''-M}{M-M'},\ \frac{M'-M''}{M''-M},\ \frac{M''-M'}{M'-M},$$

ne peuvent pas être négatives en même tems, d'où il suit qu'une au moins des suppositions précédentes sera possible: or, chacune d'elles donne deux valeurs de tang θ ou de tang φ, et par conséquent il en résulte, dans chaque cas deux positions du plan coupant qui donnent des circonférences de cercle.

Il suit de là, 1°. qu'en général, par chaque point d'une surface du second degré, on peut toujours faire passer deux plans qui la coupent suivant une circonférence de cercle.

2°. Lorsque l'on a fait disparaître de l'équation de la surface les rectangles des coordonnées, les plans coupans qui donnent des cercles sont perpendiculaires à l'un des plans coordonnés.

3°. Comme les conditions précédentes ne déterminent que les angles θ et φ, et non pas les coordonnées a, b, c, il existe pour chaque surface une infinité de plans qui donnent des cercles, et ils sont tous parallèles entre eux. Quant aux indéterminées a, b, c, on peut en disposer pour que l'origine des $x'y'$ se trouve au centre même du cercle suivant lequel la surface est coupée : cette condition, qui rend les coefficiens de x' et de y' nuls, donne entre a, b, c, deux équations linéaires; d'où il suit que, pour chaque surface, les centres de tous ces cercles sont situés sur une même ligne droite.

a et b étant supposés déterminés par ces deux équations,

c reste encore arbitraire; mais, pour que les cercles dont il s'agit soient réels, il faut que le dernier terme de l'équation transformée en x'^2 et y'^2 soit de signe contraire aux deux autres. Cette condition, qui limite les valeurs de c, pourra toujours être remplie pour chaque surface, excepté dans les points où elle ne s'étend pas. Il suit de là que toute surface du second degré peut être engendrée par le mouvement d'un cercle toujours parallèle à lui-même, et variable de rayon.

En appliquant ces résultats au cône elliptique, on pourra le couper suivant une circonférence de cercle ; ce qui donnera le cône oblique que l'on considère relativement à son volume dans les élémens de géométrie, et dont nous aurions pu, quoique avec moins de simplicité, déduire toutes les courbes du second ordre. Une des sections circulaires étant regardée comme base de cette surface, l'autre se nomme *section souscontraire*. Il est aisé de voir, par ce qui précède, que, si le cône est droit, la section souscontraire se confond avec la base.

On trouverait de même quelles sont les surfaces du second degré qui peuvent être coupées suivant des lignes droites, et les élèves pourront s'exercer à cette recherche.

Des Plans tangens aux Surfaces du second ordre.

273. Par un point quelconque pris sur une surface courbe, on peut mener une infinité de droites qui ne la rencontrent qu'en ce point. L'ensemble de ces droites forme, comme on le verra tout-à-l'heure, une surface plane que l'on nomme *plan tangent*, et qui est, par rapport aux surfaces, ce que sont les tangentes par rapport aux lignes.

Cherchons l'équation du plan tangent relativement aux surfaces du second ordre : pour cela, reprenons celle de ces surfaces, qui est

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Cz+C'y+C''x+L=0 \quad (1).$$

En supposant qu'on ait fait disparaître les rectangles des coordonnées : soient x'' y'' z'' les coordonnées du point de tangence, on aura

$$Az''^2+A'y''^2+A''x''^2+Cz''+C'y''+C''x''+L=0 \quad (2).$$

Les équations d'une droite menée par ce point, suivant une direction quelconque, seront

$$x-x''=a(z-z''), \qquad y-y''=b(z-z'')$$

a et b représentant les tangentes trigonométriques des angles que ses projections forment avec l'axe des z. Dans les points où cette droite rencontre la surface, ses équations subsistent en même tems que les deux précédentes. Or, en retranchant ces dernières l'une de l'autre, on a

$$A(z+z'')(z-z'')+A'(y+y'')(y-y'')+A''(x+x'')(x-x'') \\ +C(z-z'')+C'(y-y'')+C''(x-x'')=0.$$

Mettant pour $y-y''$ et $x-x''$ leurs valeurs données par l'équation de la droite, on aura, relativement aux points d'intersection,

$$\{A(z+z'')+A'b(y+y'')+A''a(x+x'')+C+C'b+C''a\}(z-z'')=0.$$

Cette équation est satisfaite quand $z=z''$; ce qui donne $y=y''$ et $x=x''$, parce que le point dont les coordonnées sont $x''y''$ z'' est sur la droite. Supprimant le facteur, il vient

$$A(z+z'')+A'b(y+y'')+A''a(x+x'')+C+C'b+C''a=0.$$

Cette équation appartient au second point dans lequel la droite, considérée comme sécante, rencontre la surface. Si elle est tangente, ce second point doit se confondre avec le premier, et ses coordonnées doivent être les mêmes. L'équation précédente doit donc alors être satisfaite, quand on fait

$$x=x'', \quad y=y'', \quad z=z'';$$

ce qui donne

$$2Az''+2A'by''+2A''ax''+C+C'b+C''a=0 \quad (4).$$

C'est la condition nécessaire pour qu'une droite soit tangente à une surface du second ordre. Comme elle ne suffit pas pour déterminer les deux quantités a et b, une d'entre elles reste arbitraire, et il existe pour chaque point une infinité de droites qui jouissent de cette propriété.

Si on élimine a et b au moyen de leurs valeurs prises dans l'équation de la droite, le résultat exprimera toujours une propriété commune aux droites qui touchent la surface dans le point donné, mais il ne renfermera rien qui soit particulier à aucune d'elles : il appartiendra par conséquent à la surface qu'elles forment, laquelle aura pour équation

$$(2Az''+C)(z-z'')+(2A'y''+C')(y-y'') \\ +(2A''x''+C'')(x-x'')=0.$$

Cette équation étant linéaire en x, y, z, le lieu de toutes les tangentes est un plan qui est lui-même tangent à la surface proposée.

En développant cette expression, et faisant usage de l'équation (2), on peut la mettre sous la forme plus simple

$$(2Az''+C)z+(2A'y''+C')y+(2A''x''+C'')x \\ +Cz''+C'y''+C''x''+2L=0 \quad (5).$$

Pour les surfaces qui ont un centre, C, C' et C'' sont nuls. L'équation du plan tangent devient alors

$$Azz'' + A'yy'' + A''xx'' + L = 0.$$

274. Une droite menée par le point de tangence, perpendiculairement au point tangent, se nomme une normale. D'après la première condition, ses équations seront de la forme

$$x - x'' = a'(z - z''), \quad y - y'' = b'(z - z'').$$

Pour que la seconde soit remplie, il faut (n°. 64) qu'on ait

$$A''x'' = a'Az'', \qquad A'y'' = b'Az'';$$

ce qui détermine a' et b'. Il ne reste plus qu'à substituer ces valeurs dans les équations de la normale. Si la surface proposée est de révolution par rapport à un des axes, par exemple, celui des y, on a $A = A''$; et la valeur de a', qui devient $\frac{x''}{z''}$, donne

$$xz'' - zx'' = 0,$$

pour la projection de la normale sur le plan des xz : cette projection passant par l'origine des coordonnées, il s'ensuit que la normale rencontre l'axe des y. Cette propriété est générale, et, lorsqu'une surface est de révolution autour d'un axe, toutes ses normales rencontrent cet axe.

275. En mettant dans l'équation du plan tangent, pour $x'' y'' z''$ les coordonnées du point de tangence, il sera facile ensuite de construire ce plan. On peut aisément faire l'application de ces résultats aux diverses surfaces du second ordre que nous avons discutées, et l'on en verra naître plusieurs propriétés remarquables. Prenons pour exemple l'hyperboloïde que nous avons discuté dans

l'article 266. L'équation de cette surface est

$$Az^2 - A'y^2 - A''x^2 + L = 0\,;$$

celle du plan tangent sera

$$Azz'' - A'yy'' - A''xx'' + L = 0,$$

et l'on aura pour le point de tangence

$$Az''^2 - A'y''^2 - A''x''^2 + L = 0.$$

Pour trouver les points communs au plan tangent et à la surface, il faut combiner les trois équations précédentes de manière à en éliminer x, y ou z; car, dans ces points, elles subsistent en même tems. Or, si on retranche le double de la seconde de la somme des deux autres, on trouve

$$A(z-z'')^2 - A'(y-y'')^2 - A''(x-x'')^2 = 0 \quad (A).$$

La troisième, retranchée de la seconde, donne

$$Az''(z-z'') - A'y''(y-y'') - A''x''(x-x'') = 0\,;$$

d'où l'on tire

$$A(z-z'')^2 = \frac{\{A'y''(y-y'') - A''x''(x-x'')\}^2}{Az''^2}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (A), il vient

$$\{A'y''(y-y'') - A''x''(x-x'')\}^2 - AA'z''^2(y-y'')^2 - AA''z''^2(x-x'')^2 = 0.$$

Ce résultat, qui ne contient que x et y, appartient aux points communs au plan tangent et à la surface; c'est l'équation de leur projection sur le plan des xy. Elle est toujours satisfaite, quand $x = x''$, et $y = y''$; mais elle est, de plus, décomposable en facteurs du premier degré;

car, si l'on fait

$$y - y'' = a\,(x - x''),$$

les variables x et y disparaissent, et l'on a pour déterminer a l'équation du second degré

$$(A'ay'' - A''x'')^2 - AA'a^2z''^2 - AA''z''^2 = 0\,;$$

ce qui donne pour chaque point de la surface deux valeurs de a. Lorsqu'elles seront réelles, les points communs au plan tangent et à l'hyperboloïde auront pour projection deux lignes droites sur le plan des xy ; et, comme ils sont d'ailleurs situés sur ce plan, ils formeront aussi deux droites dans l'espace. Leurs projections sur les autres plans coordonnés s'obtiendront en éliminant y ou x de l'équation du plan tangent, au moyen de celle de la projection déja trouvée ; ce qui revient à combiner ensemble les équations

$$Az''(z - z'') - A'y''(y - y'') - A''x''(x - x'') = 0,$$
$$y - y'' = a\,(x - x'').$$

Il s'agit maintenant de savoir si les valeurs de a seront toujours réelles. Or, en développant l'équation qui détermine cette quantité, elle devient

$$A'(Az''^2 - A'y''^2)\,a^2 + 2A'A''y''x''a + A''(A''^2 - A''x''^2) = 0\,;$$

ou, en faisant usage de la relation qui existe entre les coordonnées du point de tangence,

$$A'(A''x''^2 - L)\,a^2 - 2A'A''y''x''a + A''(A'y''^2 - L) = 0.$$

La quantité affectée du signe radical, dans la valeur de a, sera

$$-A'A''(A'y''^2 - L)(A''x''^2 - L) + A'^2A''^2y''^2x''^2\,;$$

ou, en développant,

$$A'A''L\,(A'x''^2 + A''y''^2 - L)$$

qui se réduit enfin à

$$AA'A''Lz''^2.$$

Les trois quantités $AA'A''$ étant positives, a ne peut être réelle qu'autant que L sera aussi positive : par conséquent, l'hyperboloïde a une nappe dont l'équation est

$$Az^2 - A'y^2 - A''x^2 + L = 0,$$

$AA'A''$ et L étant positives, est touché par ses plans tangens suivant deux lignes droites; et il est le seul hyperboloïde du second ordre qui jouisse de cette propriété. Cette propriété n'infirme pas la définition du plan tangent donnée dans l'article 273; car il existe encore, pour chaque point de tangence, une infinité d'autres lignes droites qui n'ont que ce point de commun avec la surface.

276. Les formules précédentes peuvent encore être employées pour mener un plan tangent aux surfaces du second ordre par un point extérieur dont les coordonnées seraient connues. En effet, en les supposant représentées par x', y', z', elles doivent satisfaire à l'équation du plan tangent, ce qui donne

$$(2Az'' + C)z' + (2A'y'' + C')y' + (2A''x'' + C'')x' + Cz'' + C'y'' + C''x'' + 2L = 0 \quad (1).$$

On aurait de plus, le point de tangence étant sur la surface,

$$Az''^2 + A'y''^2 + A''x''^2 + Cz'' + C'y'' + C''x'' + L = 0 \quad (2).$$

En regardant x'', y'' et z'' comme inconnues, ces deux équations ne suffiraient pas pour les déterminer : on peut donc, par un même point extérieur, mener une infinité

de plans tangens à la surface. Si l'on élimine x' ou y' entre ces deux équations, elles donneront les projections de la courbe qui est le lieu de tous les points de tangence de ces plans : cette courbe est celle suivant laquelle la surface serait touchée par une surface conique qui aurait son centre au point donné, et qui serait engendrée par une ligne droite assujettie à passer toujours par ce point, et à toucher la surface.

L'équation (1) étant linéaire en x'', y'', z'', sa combinaison avec l'équation (2) donnera entre x'' et z'', y'' et z'', des équations du second degré ; d'où il suit que la courbe de tangence sera une section conique ; et, par conséquent, les surfaces coniques, tangentes à des surfaces du second ordre, sont elles-mêmes du second ordre.

La position du plan tangent serait déterminée, si l'on connaissait un second point par lequel il dût passer ; car, en désignant par x''', y''', z''', ses coordonnées, on aurait

$$(2Az''+C)z'''+(2A'y''+C')y'''+(2A''x''+C'')x''' + Cz''+C'y''+C''x''+2L=0 \quad (3).$$

Les équations (1), (2), (3), suffiront pour déterminer les coordonnées x'', y'', z'', du point de tangence en fonction de x', y', z' ; x''', y''', z'''.

On arriverait à un résultat semblable, en assujettissant le plan tangent à passer par une droite donnée. En effet, soient x' y' z' les coordonnées d'un point de cette droite, son équation sera de la forme

$$x-x'=a(z-z'), \quad y-y'=b(z-z'),$$

a et b étant connus, puisque la position de la droite est supposée donnée : or, x' y' z' devant satisfaire à l'équation du plan tangent, on aura d'abord,

$$(2Az''+C)z'+(2A'y''+C')y'+(2A''x''+C'')x' + Cz''+C'y''+C''x''+2L=0.$$

Cette condition ayant lieu, il suffit pour que la droite soit dans le plan, qu'elle lui devienne parallèle ; ce qui donne (n°. 63)

$$Az''+A'by''+A''ax''=0.$$

On aura de plus

$$Az''^2+A'y''^2+A''x''^2+Cz''+C'y''+C''x''+L=0,$$

puisque le point de tangence est sur la surface. Ces trois équations détermineront les valeurs de $x''\,y''\,z''$; et, comme elles sont du second degré, il s'ensuit que l'on peut en général, par une droite donnée, mener deux plans tangens à une surface du second degré quelconque.

Des surfaces du second degré rapportées à leurs plans diamètres.

277. On peut rapporter les surfaces du second degré à des coordonnées obliques, ainsi que nous l'avons fait pour les lignes du même ordre. Si dans l'équation générale

$$Az^2+A'y^2+A''x^2+Byz+B'xz+B''xy + Cz+C'y+C''x+L=0,$$

où les coordonnées sont rectangulaires, on substitue pour $x\,y\,z$ les valeurs

$$x=x'\cos X+y'\cos X'+z'\cos X''$$
$$y=x'\cos Y+y'\cos Y'+z'\cos Y''$$
$$z=x'\cos Z+y'\cos Z'+z'\cos Z'',$$

dans lesquelles $x'\,y'\,z'$ soient les coordonnées relatives à

de nouveaux axes qui font entre eux un angle quelconque, et sont assujettis aux seules équations

$$\begin{aligned}\cos^2 X + \cos^2 Y + \cos^2 Z &= 1 \\ \cos^2 X' + \cos^2 Y' + \cos^2 Z' &= 1 \qquad (A) \\ \cos^2 X'' + \cos^2 Y'' + \cos^2 Z'' &= 1,\end{aligned}$$

on aura la transformée

$$Mz'^2 + M'y'^2 + M''x'^2 + Ny'z' + N'x'z' + N''x'y' + Pz' + P'y' + P''x' + L = 0.$$

On pourra toujours disposer des indéterminées, d'où dépend la position des nouveaux axes, pour rendre N, N' et N'' nuls; et cette condition pourra même être remplie d'une infinité de manières; car on a vu, dans le n°. 261, qu'en joignant aux trois équations (A) et aux suivantes

$$N = 0, \qquad N' = 0, \qquad N'' = 0,$$

les trois équations (B) qui ont lieu quand les axes sont rectangulaires, leur système suffit pour déterminer en quantités réelles les valeurs des neuf inconnues, d'où dépend la position des axes : ces équations ne suffiront donc plus pour cet objet, quand on en ôtera les trois équations (B). Ainsi non-seulement on pourra trouver des coordonnées obliques par rapport auxquelles les surfaces du second ordre auront des équations de même forme que par rapport à leurs axes rectangulaires, mais il y a une infinité de systêmes qui jouiront de cette propriété, et dont les plans sont, relativement à ces surfaces, ce que sont les diamètres dans les courbes du même ordre.

278. Nous n'entrerons pas dans un plus grand détail relativement aux surfaces du second ordre. On pourrait, à l'aide des formules précédentes, et des méthodes données dans les préliminaires, découvrir un grand nombre

de propriétés particulières à ces surfaces. Il sera très-utile à ceux qui auront lu cet Ouvrage d'effectuer ces applications qui n'offrent rien de difficile, et qui auront l'avantage de les familiariser avec l'emploi de l'analyse ; mais un pareil détail deviendrait ici superflu. La géométrie analytique repose, comme la synthétique, sur un petit nombre de préliminaires relatifs au point, à la ligne droite et au plan. Ces élémens, lorsqu'on les possède bien, suffisent pour mettre en équation tous les problêmes que la Géométrie présente, sans qu'il soit besoin pour cela de recourir à aucune construction particulière. Il ne reste plus ensuite, pour les résoudre, qu'à surmonter les difficultés de l'analyse ; et celles-ci peuvent être souvent diminuées, ou du moins éludées par un choix heureux d'inconnues : c'est un art qui ne peut s'apprendre que dans les écrits des grands géomètres, et sur-tout dans l'Arithmétique universelle de Newton, qui en offre les plus beaux exemples.

FIN.

TABLE

DES MATIÈRES.

PRÉLIMINAIRES.

Des Points et de la Ligne droite considérés sur un plan.

Des Points et de la Ligne droite considérés en trois dimensions, ou dans l'espace.

Du Plan.

De la Discussion des lignes courbes, et de la Transformation des coordonnées.

APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENS A LA DISCUSSION DES COURBES ET DES SURFACES DU SECOND ORDRE; et d'abord

DES SECTIONS DU CÔNE.

Digitized by Google

DU CERCLE.

DE L'ELLIPSE.

De l'Ellipse rapportée à ses diamètres conjugués.

Sur l'Équation polaire de l'Ellipse, et la Mesure de sa surface.

DE LA PARABOLE.

De la Parabole rapportée à ses diamètres.

Sur l'Équation polaire de la Parabole, et sur la Mesure de sa surface.

DE L'HYPERBOLE.

Des propriétés de l'Hyperbole par rapport à ses diamètres conjugués.

Des propriétés de l'Hyperbole rapportée à ses asymptotes.

De l'Equation polaire de l'Hyperbole, et de la Mesure de sa surface.

DISCUSSION DES ÉQUATIONS.

SECONDE CLASSE. *Courbes limitées dans un sens, et indéfinies dans l'autre.*

TROISIÈME CLASSE. *Courbes indéfinies dans tous les sens.*

Identité de toutes les Courbes du second ordre avec les Sections coniques.

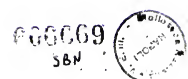
DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

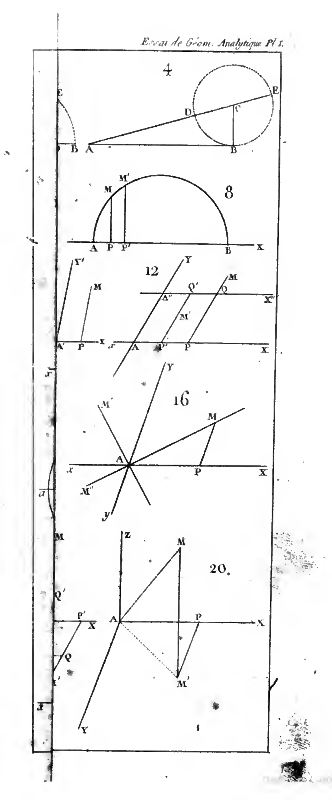
Discussion des surfaces du second ordre rapportées à leurs axes.

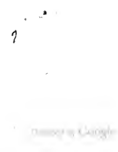
Des Plans tangens aux Surfaces du second ordre.

Des Surfaces du second ordre rapportées à leurs plans diamètres.

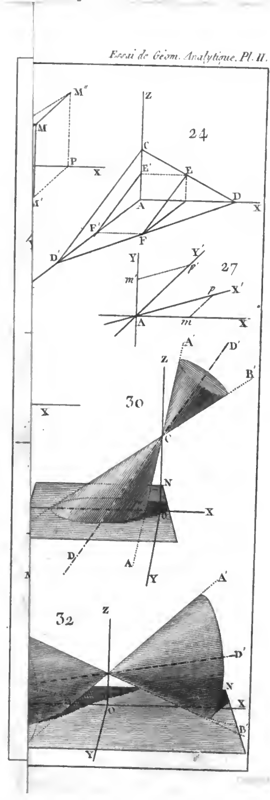
FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.



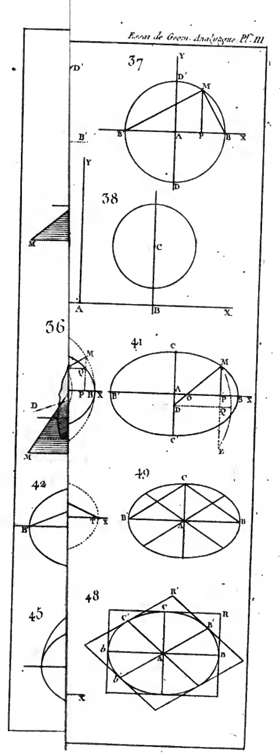

4
E
D
C
B
A
B
8
M
M'
A
P
P'
B
X
12
Y'
M
A'
P
x
Y
M
Q'
Q
A''
X''
M'
x
A
P''
P
X
Y
16
M'
M
A
x
P
X
M''
y
a
Z
M
20.
A
P
X
M'
Y
M
Q'
P'
X
Q
x



Digitized by Google

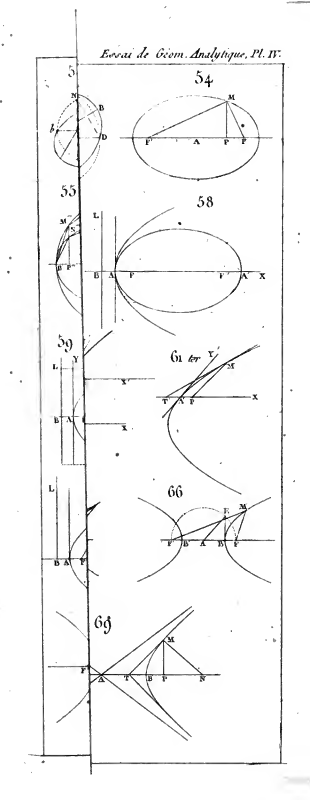

24
27
30
32
Z
C
E'
E
D
X
A
F'
F
D'
M"
M
P
Y
Y'
p'
m'
p
X'
m
A'
D'
B'
N
B'

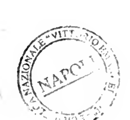




Digitized by Google




54
M
F'
A
P
F
N
B
b
D
55
M
N
B
P
58
L
B
A
F
F'
A'
X
59
Y
L
X'
B
A
X
61 ter
Y'
M
T
A'
P
X
L
B
A
F
66
E
M
F'
B'
A
B
F
69
M
F'
A
T
B
P
N



Digitized by Google

73

76

80

87 a

87 b


BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI

88

91

92

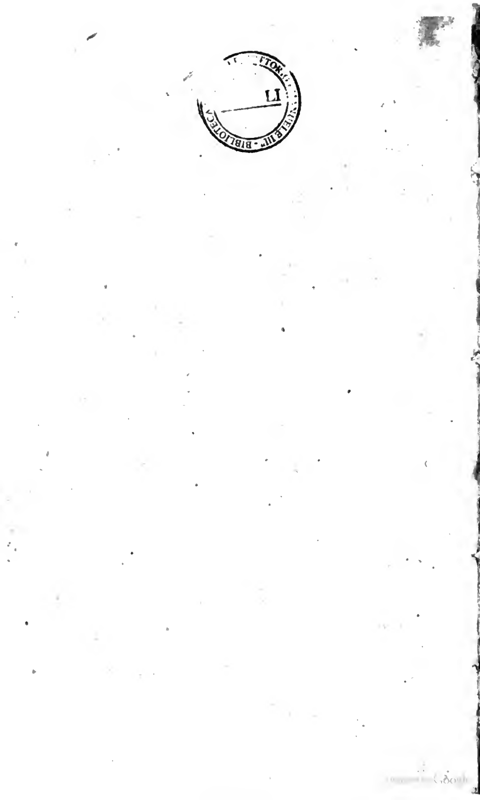
96

100

101

10

106


LI
BIBLIOTECA

Digitized by Google

